

Ε. Εισαγωγή

Ε.1 Το Λεξιλόγιο της Λογικής

1. Αριθμοσύνολα – Σύνολα Αριθμών

- 1) **Φυσικοί αριθμοί** $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots, v-2, v-1, v, v+1, v+2, \dots\}$ $\mathbf{N}^* = \mathbf{N} - \{0\}$
- 2) **Ακέραιοι αριθμοί** $\mathbf{Z} = \{\dots, -v-1, -v, -v+1, \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, v-1, v, v+1, \dots\}$
 $\mathbf{Z}^+ = \mathbf{N}^* = \{1, 2, 3, \dots, v-1, v, v+1, \dots\}$
 $\mathbf{Z}^- = \{-1, -2, -3, \dots, -v+1, -v, -v-1, \dots\}$ $\mathbf{Z}^* = \mathbf{Z} - \{0\}$
- 3) **Ρητοί αριθμοί** $\mathbf{Q} = \left\{x \mid x = \frac{\mu}{\nu}, \mu, \nu \in \mathbf{Z}, \nu \neq 0\right\}$ $\mathbf{Q}^* = \mathbf{Q} - \{0\}$
- 4) **Πραγματικοί αριθμοί** $\mathbf{R} = \{x \mid x > 0 \text{ ή } x = 0 \text{ ή } x < 0\}$ $\mathbf{R}^* = \mathbf{R} - \{0\}$
- 5) **Άρρητοι αριθμοί** $\mathbf{Q}' = \mathbf{R} - \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^c = \mathbf{Q}_a = \{x \in \mathbf{R} \mid x \notin \mathbf{Q}\}$
 Π.χ. $\sqrt{2}, \pi \in \mathbf{Q}'$, $-\frac{1}{2} \in \mathbf{Q}$, $-\frac{8}{4} \in \mathbf{Z}$, $0,33\dots \in \mathbf{Q}$, $\frac{63}{7} \in \mathbf{N}$, $1,\overline{25} \in \mathbf{Q}$, $-2 \notin \mathbf{N}$
- 6) **Παρατηρήσεις**: α) $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z} \subseteq \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{R}$ β) $\mathbf{Q}' \subseteq \mathbf{R}$
 γ) $\mathbf{Q} \cap \mathbf{Q}' = \emptyset$ δ) $\mathbf{Q} \cup \mathbf{Q}' = \mathbf{R}$
 ε) στο (1) παριστάνουμε το σύνολο \mathbf{N} με αναγραφή των στοιχείων του, ενώ στο (3) παριστάνουμε το σύνολο \mathbf{Q} με περιγραφή των στοιχείων του.

2. Άρτιοι – Περιττοί – Διαδοχικοί Ακέραιοι

- 1) **Άρτιοι**:
 λέγονται οι αριθμοί $\pm 2, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \dots$ είναι της μορφής 2λ ή 2μ ($\lambda, \mu \in \mathbf{Z}$)
- 2) **Περιττοί**:
 λέγονται οι αριθμοί $\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7, \dots$ είναι της μορφής $2\lambda+1$ ή $2\lambda-1$
- 3) **Διαδοχικοί Ακέραιοι**: $a-2, a-1, a, a+1, a+2, a+3$
 αν οι αριθμοί α, β, γ με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί ακέραιοι τότε:
 $\beta = \alpha + 1, \gamma = \alpha + 2 \Leftrightarrow \alpha = \beta - 1, \gamma = \beta + 1 \Leftrightarrow \beta - \alpha = \gamma - \beta = 1$

3. Καθολικός ποσοδείκτης (\forall) και Υπαρξιακός ποσοδείκτης (\exists)

Οι εκφράσεις «για κάθε» και «υπάρχει» ή αλλιώς «υπάρχει ένα τουλάχιστον» εμφανίζονται πολύ συχνά στα Μαθηματικά. Στη θέση αυτών των εκφράσεων θα χρησιμοποιούμε τα σύμβολα \forall (για κάθε) και \exists (υπάρχει – υπάρχει ένα τουλάχιστον), τα οποία είναι παγκόσμια σύμβολα αλλά δυστυχώς δεν αναφέρονται στα (σύγχρονα!) βιβλία των Μαθηματικών του Λυκείου.

$$\text{Π.χ. } \forall x \in \mathbf{R} \text{ ισχύει: } x^2 \geq 0, \quad \exists x \in \mathbf{R} \text{ ώστε: } x^2 \leq 0$$

4. Τα σύμβολα \Rightarrow και \Leftrightarrow

- **Λογική πρόταση** ή απλώς πρόταση για τα Μαθηματικά είναι κάθε δήλωση (ισχυρισμός), η οποία μπορεί να δεχθεί **μόνο ένα** από τους χαρακτηρισμούς: **Αληθής** – **Ψευδής**.
- **Προτασιακός τύπος** (ανοικτή πρόταση) σε ένα σύνολο B , λέγεται η δήλωση που περιέχει μία ή περισσότερες μεταβλητές και η οποία μπορεί να γίνει λογική πρόταση, αν η μεταβλητή ή οι μεταβλητές αντικατασταθούν με τυχαία στοιχεία από το σύνολο B .
 Π.χ. $x > 5$ (για $x \in \mathbf{R}$ γίνεται άλλοτε αληθής και άλλοτε ψευδής, είναι προτασιακός τύπος στο \mathbf{R})

- Όλοι οι προτασιακοί τύποι με τους οποίους θα ασχοληθούμε στην Α΄ και στη Β΄ Λυκείου, αναφέρονται στο σύνολο \mathbf{R} των πραγματικών αριθμών, εκτός και αν τονίζεται κάτι διαφορετικό.
- Τα σύμβολα \Rightarrow και \Leftrightarrow χρησιμοποιούνται **ανάμεσα σε δύο προτάσεις** (σχέσεις).
- Οι **σχέσεις** στα Μαθηματικά περιέχουν συνήθως ένα τουλάχιστον από τα σύμβολα :
 $=, \neq, >, <, \geq, \leq, \in, \notin, \subset, \not\subset, \approx$ κ.λ.π. (παγκόσμια σύμβολα)
 Π.χ. $x-3=0 \Rightarrow x=3$

- Η πρόταση $A \Rightarrow \Omega$ διαβάζεται : A συνεπάγεται Ω ή αν A τότε Ω , (η Ω είναι **αναγκαία συνθήκη** για την A ή η A είναι **ικανή συνθήκη** για την Ω), δηλαδή αν ισχύει η σχέση A τότε ισχύει και η Ω . Προσοχή αν ισχύει η σχέση Ω τότε δεν ισχύει (σίγουρα) η σχέση A.
 Π.χ. $\alpha = \beta \Rightarrow 0 \cdot \alpha = 0 \cdot \beta$ Ισχύει, ενώ
 $0\alpha = 0\beta \Rightarrow \alpha = \beta$ Δεν Ισχύει

Ένας μαθητής λύνοντας την άσκηση : « Αν $x \neq 1$, να απλοποιηθεί η παράσταση $\frac{x^2-1}{x-1} - x - 1$ »

έγραψε : $\frac{x^2-1}{x-1} - x - 1 \Rightarrow \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} - x - 1$ **αυτό είναι λάθος.**

Γιατί αριστερά και δεξιά του \Rightarrow δεν υπάρχουν σχέσεις. Ποιο είναι το σωστό ;

- **Για να αποδείξω μια πρόταση της μορφής $A \Rightarrow \Omega$** , έχω δύο τρόπους :
 - α) Ξεκινάω από τη **σχέση A (Υπόθεση)** και κάνοντας πράξεις, επιμεριστικές ιδιότητες, παραγοντοποιήσεις και εφαρμόζοντας ταυτότητες, τύπους και τα δεδομένα της άσκησης καταλήγω στη σχέση Ω (**Συμπέρασμα**). **(Ευθεία Απόδειξη)**
 - β) **Υποθέτω ότι η σχέση Ω που μου ζητούν να αποδείξω είναι λανθασμένη, δεν ισχύει.** Κάνοντας διάφορους συλλογισμούς και εφαρμόζοντας γνωστές ιδιότητες και πράξεις καταλήγω στο ότι και η σχέση A είναι λανθασμένη, πράγμα που είναι αδύνατο. **Άτοπο (Απαγωγή σε Άτοπο)**
- Η πρόταση $A \Leftrightarrow \Omega$ διαβάζεται : A ισοδυναμεί Ω ή A αν και μόνο αν Ω ή αν A τότε και μόνο τότε Ω , δηλαδή αν ισχύει η σχέση A τότε ισχύει και η Ω και αντιστρόφως αν ισχύει η Ω τότε ισχύει και η A. Αν αληθεύει η σχέση \Leftrightarrow τότε οι προτάσεις A και Ω λέγονται **ισοδύναμες**,
 Π.χ. $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha + 3 = \beta + 3$
 Το σύμβολο \Leftrightarrow το χρησιμοποιούμε οπωσδήποτε όταν λύνουμε εξισώσεις ή ανισώσεις.

- **Για να αποδείξω μια σχέση της μορφής $A \Leftrightarrow \Omega$** , έχω δύο τρόπους :
 - α) Ξεκινάω από τη σχέση A (**Υπόθεση**) και κάνοντας πράξεις, επιμεριστικές ιδιότητες, παραγοντοποιήσεις και εφαρμόζοντας ταυτότητες, τύπους και τα δεδομένα της άσκησης καταλήγω στη σχέση Ω (**Συμπέρασμα**), και στη συνέχεια παίρνω τη σχέση Ω και καταλήγω στην A. Δηλαδή :
 $A \Rightarrow B \Rightarrow \Gamma \Rightarrow \dots \Rightarrow \Omega$ δηλαδή $A \Rightarrow \Omega$ **(1)** και
 $\Omega \Rightarrow \Psi \Rightarrow \chi \Rightarrow \dots \Rightarrow A$ δηλαδή $\Omega \Rightarrow A$ **(2)**
 Αφού ισχύουν οι σχέσεις **(1)** και **(2)**, άρα $A \Leftrightarrow \Omega$

β) Συνήθως όμως ξεκινάω από τη σχέση A και προχωρώντας με ισοδυναμίες (\Leftrightarrow), δηλαδή προσέχοντας **τα βήματα που κάνω να είναι αντιστρέψιμα**, καταλήγω στη σχέση Ω .

Ένας καθηγητής κάποτε έγραψε : $x > 5 \Leftrightarrow x \neq 2$. Ποιο είναι το λάθος;

5. Διάζευξη (P ή Q)

Η Διάζευξη αληθεύει αν μία από τις δύο προτάσεις ή και οι δύο μαζί είναι αληθείς (δηλαδή αληθεύει αν τουλάχιστον μία από τις προτάσεις είναι αληθής). Στον Προγραμματισμό των Ηλεκτρονικών Υπολογιστών αντιστοιχεί στον λογικό τελεστή **OR** .

Δεν πρέπει να συγχέεται με την αποκλειστική διάζευξη όπου μόνο μία από τις δύο προτάσεις είναι αληθής (ή P ή Q). Στον Προγραμματισμό των Ηλεκτρονικών Υπολογιστών αντιστοιχεί στον λογικό τελεστή **XOR** .

Στα Αρχαία Ελληνικά για τη διάζευξη χρησιμοποιούσαν το **είτε** (P είτε Q) και για την αποκλειστική διάζευξη το **ή** (P ή Q)

6. Σύζευξη (P και Q)

Η Σύζευξη αληθεύει αν και οι δύο προτάσεις είναι αληθείς. Στον Προγραμματισμό των Ηλεκτρονικών Υπολογιστών αντιστοιχεί στον λογικό τελεστή **AND** .

Οι πίνακες αληθείας για τους παραπάνω λογικούς τελεστές είναι :

P	Q	P ή Q
A	A	A
A	Ψ	A
Ψ	A	A
Ψ	Ψ	Ψ

P	Q	P και Q
A	A	A
A	Ψ	Ψ
Ψ	A	Ψ
Ψ	Ψ	Ψ

7. Άρνηση (όχι P , δεν ισχύει η P)

Η Άρνηση αληθεύει όταν δεν αληθεύει η πρόταση και αντιστρόφως. Στον Προγραμματισμό των Ηλεκτρονικών Υπολογιστών αντιστοιχεί στον λογικό τελεστή **NOT**.

Ο πίνακας αληθείας είναι :

P	όχι P
A	Ψ
Ψ	A

8. Αντιθετοαντιστροφή (όχι Q ⇒ όχι P) ⇔ (P ⇒ Q)

Αντί να αποδείξω τη πρόταση $P \Rightarrow Q$, μπορώ να αποδείξω την αντιθετοαντίστροφη της, δηλαδή τη πρόταση : $\text{όχι } Q \Rightarrow \text{όχι } P$. Αυτές οι δύο προτάσεις είναι ισοδύναμες.

π.χ. $(\alpha \cdot \beta = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \text{ ή } \beta = 0) \Leftrightarrow (\alpha \neq 0 \text{ και } \beta \neq 0 \Rightarrow \alpha \cdot \beta \neq 0)$
 $(x > 5 \Rightarrow x \neq 2) \Leftrightarrow (x = 2 \Rightarrow x \leq 5)$

Δηλαδή στον Προγραμματισμό των Ηλεκτρονικών Υπολογιστών οι δύο παρακάτω εντολές εκτελούν την ίδια εργασία :

{	if (P and Q) then K	}
	else L	

ή ισοδύναμα

{	if (not P or not Q) then L	}
	else K	

Η διάζευξη, η σύζευξη , η άρνηση, η συνεπαγωγή και η ισοδυναμία προέρχονται από τη Λογική του **Αριστοτέλη**, που χρησιμοποιείται απόφια στα Μαθηματικά και τους Υπολογιστές.

Ε.2 Σύνολα

9. Ίσα Σύνολα

Δύο σύνολα A και B λέγονται ίσα, όταν έχουν τα ίδια ακριβώς στοιχεία.

Π.χ. $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 2, 1\}$.

10. Υποσύνολα Συνόλου

Ένα σύνολο A λέγεται υποσύνολο ενός συνόλου B , όταν κάθε στοιχείο του A είναι και στοιχείο του B . Δηλαδή : $A \subseteq B \Leftrightarrow (\text{για κάθε } x \in A \Rightarrow x \in B)$. Από τον ορισμό προκύπτουν οι ιδιότητες :

- α) $A \subseteq A$ (αυτοπαθής ή ανακλαστική)
- β) αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq \Gamma \Rightarrow A \subseteq \Gamma$ (μεταβατική)
- γ) αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq A \Rightarrow A = B$ (αντισυμμετρική)

11. Πράξεις Συνόλων

	Διαγράμματα Venn
$A \subseteq B$	
1) Ένωση : $A \cup B = \{x \in \Omega / x \in A \text{ ή } x \in B\}$ $A \cup \Omega = \Omega$, $A \cup B = B \cup A$, $A \cup A = A$, $A \cup \emptyset = A$ $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$, $A \subseteq (A \cup B)$, $B \subseteq (A \cup B)$	
2) Τομή : $A \cap B = \{x \in \Omega / x \in A \text{ και } x \in B\}$ $A \cap \Omega = A$, $A \cap B = B \cap A$, $A \cap A = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$ $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$, $(A \cap B) \subseteq A$, $(A \cap B) \subseteq B$	
3) Συμπλήρωμα : $A' = \{x \in \Omega / x \notin A\}$ $(A')' = A$, $A \cap A' = \emptyset$, $A \cup A' = \Omega$, $A \subseteq B \Leftrightarrow B' \subseteq A'$	
4) Διαφορά του B από το A : $A - B = \{x \in \Omega / x \in A \text{ και } x \notin B\}$ Παρατήρηση : $A - B = A \cap B'$ $(A - B) \subseteq A$, $(A - B) \cup A = A$, $(A - B) \cap A = A - B$, $(A - B) \cap B = \emptyset$ $(A - B) \cup B = A \cup B$, $(A - B) \cup (A \cap B) = A$, $A \subseteq B \Leftrightarrow A - B = \emptyset$	
5) Νόμοι του De Morgan : $(A \cap B)' = A' \cup B'$, $(A \cup B)' = A' \cap B'$	
6) Επιμεριστικοί Νόμοι : $A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$, $A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$	
7) Διάφορες Ιδιότητες : $(A \cap B) \subseteq A \subseteq (A \cup B)$, $(A \cap B) \subseteq B \subseteq (A \cup B)$ $(A - B) \cup B = A \cup B$, $(B - A) \cup A = A \cup B$ $A \cap (A \cap B)' = A - B$	

Παραδείγματα

1. Δίνεται μια ζυγαριά (ζυγός) και διάφορα βάρη που αναφέρονται στην ίδια μονάδα (kg).

 - α) Να χωρίσετε τα βάρη : 2 , 4 , 5 , 8 , 10 , 12 ώστε η ζυγαριά να ισορροπεί.
 - β) Ποια είναι η αναγκαία συνθήκη για τα βάρη ώστε να ισορροπεί η ζυγαριά ;
 - γ) Να χωρίσετε τα βάρη : 3 , 6 , 9 , 12 , 14 , 18 ώστε η ζυγαριά να ισορροπεί.
 - δ) Η συνθήκη που βρήκατε στο ερώτημα (β) είναι ικανή ;
 - ε) Ποια είναι η αναγκαία και ικανή συνθήκη για να μπορούμε να χωρίσουμε κάποια βάρη ώστε να ισορροπεί η ζυγαριά ;

Λύση :

- α) Τα δοθέντα βάρη (μάζες) δεν μπορούν να χωριστούν ώστε να ισορροπεί η ζυγαριά.
- β) Η αναγκαία συνθήκη που πρέπει να ισχύει ώστε μπορούν να χωριστούν στη ζυγαριά είναι : «Το άθροισμα των βαρών πρέπει να είναι άρτιος αριθμός».
- γ) Ούτε τα νέα βάρη μπορούν να χωριστούν ώστε να ισορροπεί η ζυγαριά.
- δ) Το άθροισμα των νέων βαρών είναι άρτιος αριθμός, αλλά η συνθήκη αυτή (του ερωτήματος (β)) δεν είναι ικανή για να μπορούμε να χωρίσουμε τα βάρη ώστε να ισορροπεί η ζυγαριά.
- ε) Άσκηση για το σπίτι.

2. Να αποδείξετε ότι, αν ο φυσικός αριθμός χ είναι άρτιος, τότε και ο χ^2 είναι άρτιος.

Λύση :

Αφού χ άρτιος άρα θα είναι της μορφής : $\chi=2\lambda$. Τότε :

$$\chi^2 = (2\lambda)^2 = 4\lambda^2 = 2(2\lambda^2) = 2\mu$$

Συνεπώς και ο αριθμός χ^2 είναι άρτιος γιατί είναι της μορφής 2μ .

3. Να αποδείξετε ότι, αν ο χ^2 είναι άρτιος ($\chi \in \mathbb{N}^*$), τότε και ο χ είναι άρτιος.

Λύση :

Θα ακολουθήσω τη μέθοδο της εις **Άτοπο Απαγωγής** :

Έστω ότι ο χ **δεν είναι άρτιος**.

Τότε ο χ θα είναι περιττός, δηλαδή της μορφής $\chi=2\lambda+1$. Τότε :

$$\chi^2 = (2\lambda + 1)^2 = 4\lambda^2 + 4\lambda + 1 = 2(2\lambda^2 + 2\lambda) + 1 = 2\mu + 1$$

Συνεπώς και ο αριθμός χ^2 είναι περιττός γιατί είναι της μορφής $2\mu+1$. **ΑΤΟΠΟ**.

Γιατί από την υπόθεση γνωρίζουμε ότι χ^2 άρτιος. Άρα ο χ είναι άρτιος.

Ασκήσεις

1. Διαθέτουμε 2 κουβάδες που ο ένας χωράει 3 λίτρα και ο άλλος 5 λίτρα. Πως θα μεταφέρουμε ακριβώς 4 λίτρα νερό από μια βρύση;
2. Ένας γαλατάς στο χωριό μοιράζει γάλα από ένα βαρέλι και διαθέτει 2 δοχεία που το ένα χωράει 3 λίτρα και τ άλλο 5 λίτρα. Πως θα μπορέσει να μετρήσει ακριβώς 1 λίτρο γάλακτος;
3. Ένας Λαγός και μία Γάτα ζυγίζουν 10 kg . Δηλαδή $\Lambda + \Gamma = 10$.
Ένας Λαγός και ένας Σκύλος ζυγίζουν 20 kg . Δηλαδή $\Lambda + \Sigma = 20$.
Μία Γάτα και ένας Σκύλος ζυγίζουν 24 kg . Δηλαδή $\Gamma + \Sigma = 24$.
Πόσο ζυγίζουν ένας Λαγός , μία Γάτα και ένας Σκύλος μαζί;



4. Σε ένα τουρνουά τένις συμμετέχουν 255 παίκτες. Οι παίκτες χωρίζονται με κλήρωση σε ζευγάρια και παίζουν τα παιχνίδια τους, ενώ αυτός που περισσεύει παραμερίζεται. Στον επόμενο γύρο παίζουν μόνο οι νικητές του προηγούμενου γύρου και αυτός που παραμερίστηκε και η διαδικασία προχωράει με αυτό τον τρόπο. Τελικά μένουν μόνο δύο παίκτες και ο νικητής είναι ο πρωταθλητής. Πόσα παιχνίδια παίχτηκαν συνολικά;
5. Ένας άνθρωπος σε μια βάρκα μπορεί να μεταφέρει στην άλλη πλευρά ενός ποταμού μόνο ένα από τα : 1 πρόβατο , 1 λύκο , 1 καφάσι χόρτα. Όταν ο άνθρωπος δεν είναι παρών ο λύκος τρώει το πρόβατο και το πρόβατο τρώει τα χόρτα στο καφάσι. Με ποιο τρόπο θα τα μεταφέρει στην απέναντι όχθη και τα 3 ανέτπαφα.
6. Για να διασχίσουν ένα ποταμό 3 ιεραπόστολοι και 3 κανίβαλοι διαθέτουν μια βάρκα που χωράει μόνο 2 άτομα. Αν οι κανίβαλοι είναι περισσότεροι από τους ιεραπόστολους τότε τους τρώνε. Με ποιο τρόπο θα περάσουν απέναντι χωρίς καμία απώλεια;
7. Περνώντας μέσα από μία ζούγκλα 3 κυνηγοί φτάνουν στην όχθη ενός ποταμού με μεγάλο πλάτος και βάθος. Ο ποταμός είναι γεμάτος από πεινασμένους κροκόδειλους, αλλά στην απέναντι όχθη διακρίνουν 2 ιθαγενείς με μία βάρκα. Όμως η βάρκα μπορεί να μεταφέρει ή 1 κυνηγό με το όπλο

- και το σακίδιό του ή μόνο τους 2 ιθαγενείς. Πως μπορούν οι ιθαγενείς να βοηθήσουν τους κυνηγούς να διασχίσουν τον ποταμό με όλο τον εξοπλισμό τους;
8. Μια οικογένεια 5 ατόμων θέλει να διασχίσει μια γέφυρα, η οποία όμως αντέχει το βάρος μόνο 2 ατόμων. Είναι νύχτα και διαθέτουν ένα φακό που η μπαταρία του έχει διάρκεια ζωής 29 min. Οι χρόνοι που κάθε άτομο μπορεί να διασχίσει τη γέφυρα είναι 1, 3, 6, 8, 12 min αντίστοιχα. Με ποιο τρόπο η οικογένεια μπορεί να περάσει τη γέφυρα;
9. Δέκα φίλοι κατά την αποχώρησή τους από μια συνάντηση χαιρετούν ο καθένας τους υπόλοιπους με χειραψία (προ covid-19). Να βρείτε :
- α) Πόσες χειραψίες ανταλλάχθηκαν ;
 β) Αν ήταν 100 φίλοι πόσες χειραψίες ανταλλάχθηκαν ;
 γ) Να βρείτε το άθροισμα $1+2+3+4+\dots+98+99+100$
 δ) Γενικεύστε το συμπέρασμά σας με τις χειραψίες για n φίλους.
10. Δύο Άραβες που ταξίδευαν στην έρημο, είχαν μαζί τους ο ένας 3 πίτες και ο άλλος 5 πίτες. Στο δρόμο συνάντησαν έναν πλούσιο αλλά πεινασμένο ταξιδιώτη. Μοίρασαν λοιπόν τις 8 πίτες σε τρία ίσα μερίδια και τις έφαγαν. Ο πλούσιος φεύγοντας άφησε 8 λίρες για να πληρώσει τη μερίδα του. Πόσες λίρες πρέπει να πάρει καθένας από τους δύο Άραβες ;
11. **Η μαγεία των μαθηματικών :**
 Δύο φίλοι ο Δημήτρης και ο Κώστας συναντιόνται έξω από το σπίτι του Κώστα και ακολουθεί ο παρακάτω διάλογος :
- Δημήτρης : «Κώστα πόσων ετών είναι οι 3 κόρες σου;»
 Κώστας : «Το γινόμενο των ηλικιών τους είναι 36»
 Δημήτρης : «Δώσε μου άλλο ένα στοιχείο»
 Κώστας : «Το άθροισμα των ηλικιών τους είναι το νούμερο του σπιτιού μου»
 Δημήτρης : «Πρέπει να μου δώσεις άλλο ένα στοιχείο»
 Κώστας : «Η μικρή είναι ξανθιά !!!»
 Δημήτρης : «Α! , ωραία. Τώρα ξέρω πόσων χρονών είναι οι κόρες σου»
 Πόσων ετών είναι οι 3 κόρες του Κώστα ;
12. Το νερό της Μεσογείου περιέχει 4 ‰ αλάτι. Σε μια αλυκή εξατμίζεται κάθε μέρα το 10 % του νερού που περιέχει. Πόσο τοις ‰ αλάτι περιέχει η αλυκή μετά από 3 μέρες. (Απ: 5,49 ‰)
13. Η πλευρά ενός τετραγώνου αυξάνει κατά 10 % . Σε τι ποσοστό αυξάνει :
 α) η περίμετρός του β) το εμβαδόν του
14. **(Προτεινόμενο Θέμα για εισαγωγή στα Πρότυπα Λύκεια)**
 Οι λάμπες πυράκτωσης κοστίζουν 0,5 € η μία και έχουν μέση διάρκεια ζωής 1.200 ώρες. Οι λάμπες φωτισμού νέου τύπου (LED) κοστίζουν 6 € η μία και έχουν μέση διάρκεια ζωής 50.000 ώρες. Ποιου τύπου λάμπες σας συμφέρει να προτιμήσετε; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
15. Τα μηχανήματα αυτόματης ανάληψης των τραπεζών (ATM) ως γνωστόν δίνουν χαρτονομίσματα των 20 € και των 50 €. Ποια ποσά πολλαπλάσια των 10 € και μέχρι του ποσού των 400 € δεν μπορούμε να κάνουμε ανάληψη από ένα ATM;
16. Να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της στήλης Α με ένα μόνο στοιχείο της στήλης Β

στήλη Α	στήλη Β
	1. Το σύνολο των ακεραίων αριθμών
A. Q	2. Το σύνολο των φυσικών αριθμών
B. N	3. Το σύνολο των άρτιων αριθμών
Γ. R	4. Το σύνολο των πραγματικών αριθμών
Δ. Z	5. Το σύνολο των ρητών αριθμών
	6. Το σύνολο των περιττών αριθμών

Απάντηση :

A	
B	
Γ	
Δ	

17. Τρεις δρομείς τρέχουν με σταθερή ταχύτητα σε αγώνα 100 m . Όταν ο πρώτος δρομέας φτάνει στη γραμμή του τερματισμού, ο δεύτερος είναι 10 m πιο πίσω. Όταν ο δεύτερος φτάνει στη γραμμή του τερματισμού, ο τρίτος είναι 10 m πιο πίσω. Πόσα m απέχει από τη γραμμή του τερματισμού ο τρίτος όταν τερμάτιζε ο πρώτος ; (Απ: 19 m)

18. Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως Αληθή (Α) ή Ψευδή (Ψ). Αναφερόμαστε σε πραγματικούς αριθμούς.

1.	$x > 5 \Rightarrow x^2 > 25$	A	Ψ	2.	$x < 4 \Rightarrow x^2 < 16$	A	Ψ
3.	$x^2 < 16 \Rightarrow x < 4$	A	Ψ	4.	$x^2 > 25 \Rightarrow x > 5$	A	Ψ
5.	$-5 < x < 5 \Rightarrow x < 5$	A	Ψ	6.	$x < 5 \Rightarrow -5 < x < 5$	A	Ψ
7.	$x \neq 6 \Rightarrow x^2 \neq 36$	A	Ψ	8.	$x^2 \neq 36 \Rightarrow x \neq 6$	A	Ψ
9.	$x = 6 \Rightarrow x^2 = 36$	A	Ψ	10.	$x^2 = 36 \Rightarrow x = 6$	A	Ψ
11.	$x < 1 \Leftrightarrow x^2 < 1$	A	Ψ	12.	$x = 6 \Leftrightarrow x^2 = 36$	A	Ψ
13.	$x^2 < 9 \Rightarrow x < 3$	A	Ψ	14.	$x < 3 \Rightarrow x^2 < 9$	A	Ψ
15.	$x > 7 \Rightarrow x^2 > 49$	A	Ψ	16.	$x^2 > 49 \Rightarrow x > 7$	A	Ψ
17.	$\alpha < 5 \Rightarrow \alpha \leq 5$	A	Ψ	18.	$\alpha \leq 5 \Rightarrow \alpha < 5$	A	Ψ
19.	$-7\alpha < 0 \Rightarrow \alpha > 0$	A	Ψ	20.	$-3\alpha \geq 0 \Rightarrow \alpha < 0$	A	Ψ

19. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα χρησιμοποιώντας το σύμβολο \in όπως στο παράδειγμα της πρώτης γραμμής.

Αριθμός	Φυσικοί N	Ακέραιοι Z	Ρητοί Q	Άρρητοι Q'	Πραγματικοί R
$\frac{4}{2}$	\in	\in	\in		\in
-1					
$\sqrt{2}$					
$\frac{5}{4}$					
$1 + \sqrt{3}$					
-5,5					
$2,1\overline{5}$					
π					
$\frac{\sqrt{2}}{2}$					
0,999...					
1,333...					
$\frac{18}{6}$					
3,14					
$\sqrt{144}$					
$-\frac{13}{3}$					
$\frac{56}{7}$					

20. α) Αν P, Q είναι λογικές προτάσεις, να κάνετε πίνακες αληθείας για τις προτάσεις P και $Q, P \text{ ή } Q$
 β) Δείξτε με πίνακα αληθείας τις παρακάτω ισοδυναμίες :
 1) $\text{όχι } (P \text{ ή } Q) \Leftrightarrow (\text{όχι } P) \text{ και } (\text{όχι } Q)$. 2) $\text{όχι } (P \text{ και } Q) \Leftrightarrow (\text{όχι } P) \text{ ή } (\text{όχι } Q)$

21. Να βρείτε τις αντίθετες (αρνήσεις) των παρακάτω προτάσεων (όπου $x, y \in \mathbf{R}$) :

1. $\text{Ο } x \text{ είναι αρνητικός}$	2. $\text{Ο } x \text{ είναι άρτιος}$
3. $x > 5$	4. $x \notin Q'$
5. $x \in \mathbf{Z}$	6. $x > 2$ και $x \leq 5$
7. $x \leq 3$	8. $x \geq 3$ ή $x \neq 2$
9. υπάρχει $x \in \mathbf{R}$ ώστε $x^2 < 0$	10. για κάθε $x \in \mathbf{R}$ ισχύει $x^2 > 0$
11. $x^2 \neq 0$ και $x > 0$	12. $x > 0 \Rightarrow x^2 > 0$
13. $x < 0 \Rightarrow 3x < 0$	14. $x^2 = 4$
15. $x = 3 \Rightarrow x^2 = 9$	16. $x > -2$ και $x > -5$
17. $x < 3$ ή $x < 7$	18. $x \in \mathbf{Z}$ και $x \notin \mathbf{N}$
19. $x^2 = 16 \Leftrightarrow x = 4$ ή $x = -4$	20. $x < 2 \Rightarrow x \leq 5$
21. $x^2 \neq 4 \Leftrightarrow x \neq 2$ και $x \neq -2$	22. $x \in \mathbf{Z}$ και $x > -1$
23. $x < 0$ ή $x \notin \mathbf{N}$	24. $x \neq y$ τότε $f(x) \neq f(y)$

22. Αν αναφερόμαστε σε **ακέραιους** αριθμούς, να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες :

1. άρτιος + άρτιος = _____	2. άρτιος + περιττός = _____
3. περιττός + περιττός = _____	4. άρτιος – άρτιος = _____
5. άρτιος – περιττός = _____	6. περιττός – περιττός = _____
7. περιττός – άρτιος = _____	8. άρτιος · άρτιος = _____
9. άρτιος · περιττός = _____	10. περιττός · περιττός = _____

23. Συμπληρώστε τις παρακάτω ισότητες με μία από τις λέξεις : **φυσικός , ακέραιος , ρητός , άρρητος ή δεν γνωρίζουμε.**

1. φυσικός + φυσικός = _____	2. φυσικός – φυσικός = _____
3. φυσικός · φυσικός = _____	4. φυσικός : φυσικός = _____
5. ακέραιος + ακέραιος = _____	6. ακέραιος – ακέραιος = _____
7. ακέραιος · ακέραιος = _____	8. ακέραιος : ακέραιος = _____
9. ρητός + ρητός = _____	10. ρητός – ρητός = _____
11. ρητός · ρητός = _____	12. ρητός : ρητός = _____
13. ρητός + άρρητος = _____	14. ρητός – άρρητος = _____
15. ρητός · άρρητος = _____	16. ρητός : άρρητος = _____
17. άρρητος · άρρητος = _____	18. άρρητος : άρρητος = _____

24. Αν $\alpha \in \mathbf{Z}$ να εξετάσετε ποιοι από τους παρακάτω αριθμούς είναι άρτιοι και ποιοι περιττοί :

1. 2α	2. $2\alpha + 1$	3. $2\alpha + 6$	4. $2\alpha + 11$
5. $2\alpha - 2$	6. $4\alpha - 18$	7. $6\alpha - 3$	8. $2(\alpha + 1)$

25. Έστω $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ τέσσερις διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί. Να αποδείξετε ότι :

- 1) $\alpha - \beta - \gamma + \delta = 0$ 2) ο αριθμός $\beta + \gamma$ είναι περιττός
 3) ο αριθμός $\alpha + \gamma$ είναι άρτιος 4) ο αριθμός $\alpha + \beta + \gamma$ είναι πολλαπλάσιο του 3
 5) ο αριθμός $(\alpha + \gamma)(\beta + \delta)$ είναι πολλαπλάσιο του 4

26. α) Αν $v \in \mathbf{N}^*$ δείξτε ότι ο $v^2 + v$ είναι άρτιος.

- β) Αν $\alpha, \beta \in \mathbf{N}^*$ και περιττοί , δείξτε ότι $\alpha + \beta$ είναι άρτιος αριθμός.

- γ) Αν $v \in \mathbb{N}^*$ και v περιττός, δείξτε ότι οι αριθμοί v^2-1 και v^3-v διαιρούνται με το 4 .
 δ) Δείξτε ότι το τετράγωνο ενός περιττού αριθμού αν μειωθεί κατά 1 είναι πολλαπλάσιο του 8.

27. Να αποδείξετε ότι :

- α) αν ο χ^2 είναι περιττός ($\chi \in \mathbb{N}^*$) , τότε και ο χ είναι περιττός.
 β) αν ο χ^2 είναι άρρητος , τότε και ο χ είναι άρρητος.
 γ) αν ο $(\chi + 3)^2$ είναι άρτιος $\chi \in \mathbb{Z}$, τότε ο χ είναι περιττός.
 δ) αν ο $(\chi - 6)^2$ είναι άρτιος $\chi \in \mathbb{Z}$, τότε ο χ είναι άρτιος.

28. Αν $A = \{1, 2, 3\}$ και $B = \{2, 3, 5\}$, τότε το σύνολο $A \cup B$ είναι ίσο με :

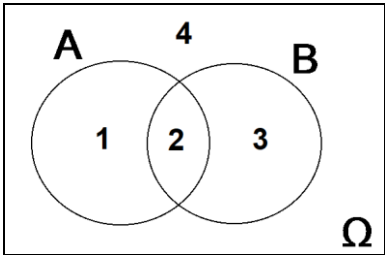
- A. $\{1,2,5\}$ B. $\{1,2,3,4,5\}$ Γ. $\{1,2,3,2,3,5\}$ Δ. $\{2,3\}$ E. $\{1,2,3,5\}$

29. Το σύνολο των ψηφίων του αριθμού $3^2 \cdot 4$ είναι το :

- A. $\{3, 2, 4\}$ B. $\{3, 4\}$ Γ. $\{6, 3\}$ Δ. $\{9, 4\}$ E. $\{2, 4\}$

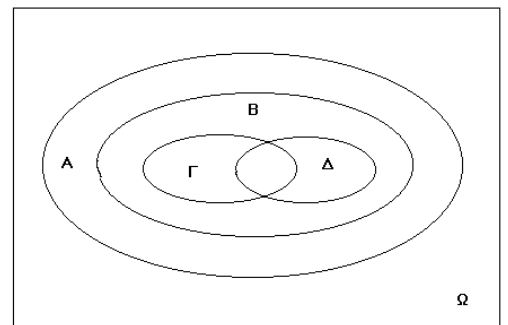
30. Με βάση το παρακάτω διάγραμμα του Venn συμπληρώστε τον πίνακα που ακολουθεί ($A, B \subseteq \Omega$) , ακολουθώντας το παράδειγμα της πρώτης γραμμής.

	Γραφή σε γλώσσα συνόλων	Γραφή σε φυσική γλώσσα	Μέρος του σχήματος
1.	B'	όχι B	1, 4
2.	$A \cap B$		
3.	$A \cup B$		
4.	A'		
5.	$A - B$		
6.	$B - A$		
7.	$A \cap B'$		
8.	$A' \cap B$		
9.	$(A - B) \cup (B - A)$		



31. Οι σχέσεις (1) μέχρι (15) αναφέρονται στο παρακάτω διάγραμμα του Venn. Βάλτε σε κύκλο το γράμμα (Σ) ή (Λ) αντίστοιχα αν η σχέση είναι σωστή ή λάθος.

- | | | | | | |
|---------------------------------------|---|---|-------------------------------------|---|---|
| 1) $A \subseteq B$ | Σ | Λ | 2) $B \subseteq A$ | Σ | Λ |
| 3) $\Gamma \subseteq B$ | Σ | Λ | 4) $\Delta \subseteq \Gamma$ | Σ | Λ |
| 5) $\Gamma \cup \Delta \subseteq A$ | Σ | Λ | 6) $\Gamma \cup \Delta \subseteq B$ | Σ | Λ |
| 7) $\Gamma \cap \Delta \subseteq A$ | Σ | Λ | 8) $B \cup \Gamma = A$ | Σ | Λ |
| 9) $B \cup \Gamma \cup \Delta = A$ | Σ | Λ | | | |
| 10) $A \cup B = B$ | Σ | Λ | | | |
| 11) $A \cap B = B$ | Σ | Λ | | | |
| 12) $(\Gamma \cap \Delta) \cup A = A$ | Σ | Λ | | | |
| 13) $(\Gamma \cap \Delta) \cap A = B$ | Σ | Λ | | | |
| 14) $B \cap \Delta = \Delta$ | Σ | Λ | | | |
| 15) $(\Gamma \cap B) \cap A = \Gamma$ | Σ | Λ | | | |



32. Έστω το βασικό σύνολο $\Omega = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ και τα υποσύνολά του $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ και $B = \{1, 3, 10\}$.

- α) Να παραστήσετε τα παραπάνω σύνολα με διάγραμμα Venn.
 β) Να γράψετε το σύνολο A με περιγραφή των στοιχείων του.
 γ) Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις αν είναι Σωστή (Σ) ή Λάθος (Λ).
- | | | | | | |
|---------------------------|---|---|------------------------|---|---|
| 1) $2 \in A$ | Σ | Λ | 2) $2 \notin A$ | Σ | Λ |
| 3) $B \subseteq \Omega$ | Σ | Λ | 4) $B \subseteq A$ | Σ | Λ |
| 5) $A \cap B = \emptyset$ | Σ | Λ | 6) $A \cap B = \{10\}$ | Σ | Λ |
| 7) $A \cup B = \Omega$ | Σ | Λ | 8) $3 \in B$ | Σ | Λ |

33. Αν τα σύνολα A, B και $A \cup B$ έχουν αντίστοιχα 3, 5 και v στοιχεία, τότε :
A. $v=8$ **B.** $3 \leq v \leq 5$ **Γ.** $v=5$ **Δ.** $v=3$ **Ε.** $5 \leq v \leq 8$
34. Αν τα σύνολα A, B και $A \cap B$ έχουν αντίστοιχα 3, 5 και μ στοιχεία, τότε :
A. $\mu=3$ **B.** $\mu=2$ **Γ.** $3 \leq \mu \leq 5$ **Δ.** $\mu=5$ **Ε.** $0 \leq \mu \leq 3$
35. Συμπληρώστε τον πίνακα βάζοντας στη στήλη Β τον χαρακτηρισμό Σ (Σωστό) ή Λ (Λάθος). Όπου βάλατε Λ (Λάθος) συμπληρώστε στη στήλη Γ τη σωστή σχέση.

	Στήλη Α	Στήλη Β	Στήλη Γ
1.	$A \cup A = A$		
2.	$A \cup \emptyset = A$		
3.	$A \cap A = \emptyset$	Λ	$A \cap A = A$
4.	$A \cap \emptyset = A$		
5.	$A' \cap A = \Omega$		
6.	$A' \cup A = \emptyset$		
7.	$\Omega' = \Omega$		
8.	$(A')' = \Omega$		
9.	$A \cap B = B \cap A$		
10.	$A \cap B = B \cup A$		
11.	$\emptyset' = \Omega$		
12.	Αν $A \subseteq B$ τότε $A \cup B = B$		
13.	$A' \cup A = \Omega$		
14.	$A' \cap A = \emptyset$		
15.	$(A')' = A$		
16.	Αν $A \subseteq B$ τότε $A \cap B = A$		

36. Αν κάθε στοιχείο ενός συνόλου Β είναι και στοιχείο ενός συνόλου Α, τότε το Β λέγεται του Α. Ο σχετικός συμβολισμός είναι $B \dots A$.
37. Το σύνολο που έχει ως στοιχεία του τα κοινά στοιχεία δύο συνόλων Α και Β και μόνο αυτά ονομάζεται των Α και Β και συμβολίζεται με
38. Αν $K = \{0, 3, 5\}$, $\Lambda = \{0\}$, $M = \{3, 5\}$, $N = \{5, 3\}$ τότε είναι :
A. $K \subseteq \Lambda$ **B.** $\Lambda \subseteq M$ **Γ.** $M \subseteq \Lambda$ **Δ.** $N \subseteq K$ **Ε.** $N \subseteq \Lambda$
39. Από τις παρακάτω ισότητες σωστή είναι η :
A. $A \cap \emptyset = A$ **B.** $A' \cap A = \Omega$ **Γ.** $A \cap B = A \cup B$ **Δ.** $\Omega' = \Omega$ **Ε.** $(A')' = A$
40. Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις αν είναι Σωστή (Σ) ή Λάθος (Λ).

1.	Ο αριθμός 12 είναι φυσικός.	Σ	Λ
2.	$\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\right\} = \left\{x \mid x = \frac{1}{v}, v \in \mathbf{N}^*\right\}$	Σ	Λ
3.	Το κενό σύνολο συμβολίζεται : $\{0\}$.	Σ	Λ
4.	Οι άρρητοι αριθμοί ανήκουν στο σύνολο \mathbf{R} .	Σ	Λ
5.	Η σχέση $x < 5$ είναι ισοδύναμη με τη σχέση $5 > x$.	Σ	Λ
6.	Η αντίθετη της σχέσης $x < 5$ είναι η σχέση $x > 5$.	Σ	Λ
7.	Ισχύει : $\sqrt{2} > 1,5$.	Σ	Λ
8.	Είναι αληθής η πρόταση : «Αν $x < 5$ τότε $x \neq 7$ ».	Σ	Λ
9.	Ο αριθμός $6v$, $v \in \mathbf{N}^*$ είναι άρτιος.	Σ	Λ
10.	Ισχύει : $\sqrt{5} > 2$.	Σ	Λ
11.	Ο $\sqrt{2}$ μπορεί να γραφεί στη μορφή ανάγωγου κλάσματος $\frac{\mu}{v}$, $\mu, v \in \mathbf{Z}, v \neq 0$.	Σ	Λ
12.	Ο αριθμός $7v$, $v \in \mathbf{N}^*$ μπορεί να είναι άρτιος.	Σ	Λ

13.	Ισχύει : $\sqrt{3} > 1,7$.	Σ	Λ
14.	Ο αριθμός $\sqrt{49}$ είναι φυσικός.	Σ	Λ
15.	Αν $\alpha - \beta$ είναι περιττός ($\alpha, \beta \in \mathbf{N}^*$), τότε οι α και β είναι περιττοί.	Σ	Λ
16.	Αν $\alpha, \beta \in \mathbf{N}$, τότε $\alpha + \beta \in \mathbf{N}$.	Σ	Λ
17.	Αν $\alpha, \beta \in \mathbf{N}$, τότε $\alpha - \beta \in \mathbf{N}$.	Σ	Λ
18.	Αν $\alpha, \beta \in \mathbf{N}$, τότε $\alpha \cdot \beta \in \mathbf{N}$.	Σ	Λ
19.	Αν $\alpha, \beta \in \mathbf{N}$, τότε $\alpha - \beta \in \mathbf{Z}$.	Σ	Λ
20.	Αν $\alpha, \beta \in \mathbf{N}^*$, τότε $\frac{\alpha}{\beta} \in \mathbf{N}$.	Σ	Λ
21.	Αν $\alpha, \beta \in \mathbf{N}^*$, τότε $\frac{\alpha}{\beta} \in \mathbf{Q}$.	Σ	Λ
22.	Υπάρχει ακέραιος που δεν είναι άρτιος, ούτε περιττός.	Σ	Λ
23.	Το κλάσμα $\frac{3}{5}$ είναι ίσο με τον αριθμό 0,6.	Σ	Λ
24.	Το 30 % είναι το κλάσμα $\frac{1}{3}$.	Σ	Λ
25.	Αν ο αριθμός x αυξηθεί κατά 20 % θα γίνει $1,2 \cdot x$.	Σ	Λ
26.	Ισχύει $-\frac{1}{2} > -\frac{1}{3}$.	Σ	Λ
27.	Αν $A \subseteq B \Rightarrow B - A = A'$.	Σ	Λ
28.	Αν $\alpha > 0 \Rightarrow \alpha > \frac{1}{\alpha}$.	Σ	Λ

41. Δίνονται τα σύνολα $A = \{x \in \mathbf{R} \mid x \leq 5\}$ και $B = \{x \mid x \text{ άρτιος}\}$. Να βρείτε τον καταλληλότερο τρόπο για να γράψετε τα σύνολα $A \cap B$, $A \cup B$.
42. Να γράψετε με περιγραφή το σύνολο $A = \{1, 3, 5, \dots, 99\}$.
43. Να γράψετε με αναγραφή των στοιχείων τους τα σύνολα :
 α) $A = \{x \in \mathbf{Z} \mid x \text{ διαιρέτης του } 12\}$ β) $B = \{k \in \mathbf{N} \mid k \text{ πολλαπλάσιο του } 6 \text{ και } 30 < k < 66\}$
 γ) $\Gamma = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{N} \text{ και } xy = 6\}$.
44. Για το σύνολο $\Omega = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ γνωρίζουμε ότι το πλήθος των στοιχείων του είναι $3n - 6$. Να βρείτε : α) την τιμή του n β) το σύνολο Ω .
45. Αν A, B υποσύνολα ενός συνόλου Ω , να δείξετε με διαγράμματα του Venn ότι :
 1) $A \cap (A \cup B) = A$ 2) $A \cup (A \cap B) = A$ 3) $(A - B) \cap B = \emptyset$
 4) $(A - B) \cup (A \cap B) = A$ 5) $A \cap (B - A)' = A$ 6) $(A - B) \cap (A \cap B) = \emptyset$
 7) ισχύουν οι νόμοι του De Morgan.
46. Αν A, B υποσύνολα του βασικού συνόλου $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ για τα οποία ισχύουν :
 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A \cap B = \{1, 3, 4\}$ και $B' = \{2, 6, 7, 8\}$. Να βρείτε τα A, B .
47. Αν A, B υποσύνολα του βασικού συνόλου $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ για τα οποία ισχύουν :
 $A \subseteq B$, $A \cap B = \{1, 3, 4\}$ και $B' = \{6, 7, 8\}$. Να βρείτε τα A, B .
48. Αν A, B υποσύνολα του βασικού συνόλου $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ για τα οποία ισχύουν :
 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A \cap B = \{1, 3, 4\}$ και $A - B = \{2, 6\}$. Να βρείτε τα A, B .

49. Να βρείτε τις τιμές των α , β ώστε τα σύνολα $A = \{0, \alpha, 1\}$, $B = \{0, \beta, 2\}$ να είναι ίσα και το σύνολο P που έχει για στοιχεία του τα υποσύνολα του B .
50. Δίνονται τα σύνολα : $A = \{v \in \mathbf{N} \mid v = 4 \cdot \kappa, \kappa \in \mathbf{N}\}$, $B = \{v \in \mathbf{N} \mid v = 4 \cdot \kappa + 1, \kappa \in \mathbf{N}\}$,
 $\Gamma = \{v \in \mathbf{N} \mid v = 4 \cdot \kappa + 2, \kappa \in \mathbf{N}\}$, $\Delta = \{v \in \mathbf{N} \mid v = 4 \cdot \kappa + 3, \kappa \in \mathbf{N}\}$
α) Να γράψετε με αναγραφή των στοιχείων τους τα σύνολα A , B , Γ , Δ .
β) Ποιο είναι το σύνολο $A \cup B \cup \Gamma \cup \Delta$.

2. Οι Πραγματικοί Αριθμοί

2.1.1 Οι Πράξεις και οι ιδιότητές τους

1. Ιδιότητες Πρόσθεσης και Πολλαπλασιασμού

ΙΔΙΟΤΗΤΑ	ΠΡΟΣΘΕΣΗ	ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ
Αντιμεταθετική	$\alpha + \beta = \beta + \alpha$	$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$
Προσεταιριστική	$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$	$\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$
Ουδέτερο Στοιχείο	$\alpha + 0 = \alpha$	$\alpha \cdot 1 = \alpha$
Συμμετρικό Στοιχείο	$\alpha + (-\alpha) = 0$	$\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1, \alpha \neq 0$
Επιμεριστική	$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$	

2. Αντίθετοι – Αντίστροφοι Αριθμοί

- Αντίθετοι λέγονται οι αριθμοί x και $-x$, δηλαδή οι αριθμοί που έχουν άθροισμα 0.
- Αντίστροφοι λέγονται οι αριθμοί x και $1/x$ ($x \neq 0$), δηλαδή οι αριθμοί που έχουν γινόμενο 1. Ο αριθμός 0 (μηδέν) δεν έχει αντίστροφο.

3. Αφαίρεση – Διαίρεση

$$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta) \qquad \alpha : \beta = \frac{\alpha}{\beta} = \alpha \cdot \frac{1}{\beta} \quad (\beta \neq 0)$$

Προσοχή : Επειδή διαίρεση με το 0 δεν ορίζεται, αν σε ασκήσεις δεν μας δίνεται ότι $\beta \neq 0$, θα πρέπει να το επισημαίνουμε, δηλαδή θα υποθέτουμε ότι όλοι οι παρονομαστές είναι διάφοροι του μηδενός.

4. Πρόσθεση – Αφαίρεση Κλασμάτων

$\frac{\alpha}{\beta} \pm \frac{\gamma}{\beta} = \frac{\alpha \pm \gamma}{\beta}$	$\frac{\alpha}{\beta} \pm \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha\delta \pm \beta\gamma}{\beta\delta}$	$-\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\delta} = \frac{-\alpha\delta + \beta\gamma}{\beta\delta}$
---	---	---

Π.χ.

$$\frac{8}{11} + \frac{3}{4} = \frac{8 \cdot 4}{11 \cdot 4} + \frac{3 \cdot 11}{4 \cdot 11} = \frac{32}{44} + \frac{33}{44} = \frac{65}{44}$$

$$\frac{5}{4} - \frac{2}{3} = \frac{5 \cdot 3}{4 \cdot 3} - \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{15}{12} - \frac{8}{12} = \frac{7}{12}$$

$$\frac{5}{6} - \frac{2}{3} = \frac{5 \cdot 3 - 2 \cdot 6}{6 \cdot 3} = \frac{15 - 12}{18} = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$$

$$-\frac{5}{6} + \frac{9}{12} = \frac{-5 \cdot 12 + 6 \cdot 9}{6 \cdot 12} = \frac{-60 + 54}{6 \cdot 12} = \frac{-6}{6 \cdot 12} = \frac{-1}{12} = -\frac{1}{12}$$

Προσοχή με τη 2^η μέθοδο, χωρίς τη χρήση του Ε.Κ.Π. (καπελάκια), ίσως χρειαστεί στο τέλος να κάνουμε **απλοποιήσεις**, ειδικότερα αν οι δύο παρονομαστές έχουν κοινό διαιρέτη.

5. Πολλαπλασιασμός – Διαίρεση

1) Για να πολλαπλασιάσουμε δύο **ομόσημους** βάζουμε πρόσημο συν (+) και πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους.

2) Για να πολλαπλασιάσουμε δύο **ετερόσημους** βάζουμε πρόσημο πλην (-) και πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους.

3) Πολλαπλασιασμός κλασμάτων

$\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha \cdot \gamma}{\beta \cdot \delta}$

4) Στη διαίρεση κλασμάτων αντιστρέφουμε το δεύτερο κλάσμα και κάνουμε πολλαπλασιασμό

$$\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\delta}{\gamma}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} : \gamma = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{1}{\gamma}$$

$$\alpha : \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha}{1} \cdot \frac{\gamma}{\beta}$$

Μερικές φορές στον πολλαπλασιασμό και στη διαίρεση κλασμάτων είναι πολύ χρήσιμο να κάνουμε απλοποιήσεις, παρά τα επιμέρους γινόμενα.

Π.χ. $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{\cancel{2}^1}{3} \cdot \frac{5}{\cancel{4}_2} = \frac{1 \cdot 5}{3 \cdot 2} = \frac{5}{6}$ $\frac{2}{3} : \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{4} = \frac{\cancel{2}^1}{\cancel{3}_1} \cdot \frac{\cancel{6}^2}{\cancel{4}_2} = \frac{1 \cdot \cancel{2}}{1 \cdot \cancel{2}} = 1$

5) Όταν πολλαπλασιάζουμε ακέραιο με ένα κλάσμα τότε πολλαπλασιάζουμε **μόνο τον αριθμητή**

$$\alpha \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha \cdot \gamma}{\delta} \quad \text{ή} \quad \frac{\gamma}{\delta} \cdot \alpha = \frac{\gamma \cdot \alpha}{\delta}$$

6) Ένα σύνθετο κλάσμα μετατρέπεται σε απλό βάζοντας στον αριθμητή το γινόμενο των δύο ακραίων παραγόντων και παρονομαστή το γινόμενο των δύο μεσαίων παραγόντων.

$$\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}} = \frac{\alpha \cdot \delta}{\beta \cdot \gamma}$$

$$\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\gamma} = \frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{1}} = \frac{\alpha \cdot 1}{\beta \cdot \gamma}$$

$$\frac{\alpha}{\frac{\beta}{\gamma}} = \frac{\alpha}{\frac{1}{\beta}} = \frac{\alpha \cdot \gamma}{1 \cdot \beta}$$

6. Πολλαπλάσια φυσικών αριθμών (times table)

2·2 = 4							
2·3 = 6	3·3 = 9						
2·4 = 8	3·4 = 12	4·4 = 16					
2·5 = 10	3·5 = 15	4·5 = 20	5·5 = 25				
2·6 = 12	3·6 = 18	4·6 = 24	5·6 = 30	6·6 = 36			
2·7 = 14	3·7 = 21	4·7 = 28	5·7 = 35	6·7 = 42	7·7 = 49		
2·8 = 16	3·8 = 24	4·8 = 32	5·8 = 40	6·8 = 48	7·8 = 56	8·8 = 64	
2·9 = 18	3·9 = 27	4·9 = 36	5·9 = 45	6·9 = 54	7·9 = 63	8·9 = 72	9·9 = 81
2·10 = 20	3·10 = 30	4·10 = 40	5·10 = 50	6·10 = 60	7·10 = 70	8·10 = 80	9·10 = 90
2·11 = 22	3·11 = 33	4·11 = 44	5·11 = 55	6·11 = 66	7·11 = 77	8·11 = 88	9·11 = 99
2·12 = 24	3·12 = 36	4·12 = 48	5·12 = 60	6·12 = 72			
2·13 = 26	3·13 = 39						
2·14 = 28	3·14 = 42						
2·15 = 30	3·15 = 45	4·15 = 60		6·15 = 90		8·15 = 120	
2·16 = 32	3·16 = 48						
2·17 = 34							
2·18 = 36							
2·19 = 38							
2·20 = 40	3·20 = 60	4·20 = 80	5·20 = 100	6·20 = 120	7·20 = 140	8·20 = 160	9·20 = 180

7. Επιμεριστική Ιδιότητα

$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$	$(\alpha + \beta)(\gamma + \delta) = \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta$
$\alpha \cdot (\beta - \gamma) = \alpha \cdot \beta - \alpha \cdot \gamma$	$(\alpha - \beta)(\gamma - \delta) = \alpha\gamma - \alpha\delta - \beta\gamma + \beta\delta$

8. Πολλαπλάσια μεγαλύτερων αριθμών

$$6 \cdot 17 = 6 \cdot (10 + 7) = 6 \cdot 10 + 6 \cdot 7 = 60 + 42 = 102$$

$$4 \cdot 33 = 4 \cdot (30 + 3) = 4 \cdot 30 + 4 \cdot 3 = 120 + 12 = 132$$

$$9 \cdot 18 = 9 \cdot (20 - 2) = 9 \cdot 20 - 9 \cdot 2 = 180 - 18 = 162$$

$$\begin{aligned}
 22 \cdot 38 &= (20 + 2) \cdot (40 - 2) = 20 \cdot 40 - 20 \cdot 2 + 2 \cdot 40 - 2 \cdot 2 = 800 - 40 + 80 - 4 = 840 - 4 = 836 \\
 19 \cdot 26 &= (20 - 1) \cdot (20 + 6) = 20 \cdot 20 + 20 \cdot 6 - 1 \cdot 20 - 1 \cdot 6 = 400 + 120 - 20 - 6 = 500 - 6 = 494 \\
 29 \cdot 58 &= (30 - 1) \cdot (60 - 2) = 30 \cdot 60 - 30 \cdot 2 - 1 \cdot 60 + 1 \cdot 2 = 1800 - 60 - 60 + 2 = 1680 + 2 = 1682 \\
 28 \cdot 124 &= (30 - 2) \cdot (100 + 20 + 4) = 30 \cdot 100 + 30 \cdot 20 + 30 \cdot 4 - 2 \cdot 100 - 2 \cdot 20 - 2 \cdot 4 = \\
 &= 3000 + 600 + 120 - 200 - 40 - 8 = 3000 + 400 + 80 - 8 = 3480 - 8 = 3472
 \end{aligned}$$

9. Προτεραιότητα Πράξεων

Προηγούνται οι πράξεις μέσα στις παρενθέσεις, ακολουθούν ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση και μετά η πρόσθεση και η αφαίρεση. Όταν έχουμε πολλές παρενθέσεις ξεκινάμε τις πράξεις από τη εσωτερική παρένθεση.

Π. χ. $5 - 3 \cdot 2 + 12 : 6 - 5 = \cancel{5} - 6 + 2 - \cancel{5} = -6 + 2 = -4$
 $-3 - 2(2 - 5) - (-3 + 9) : (-2) = -3 - 2(-3) - 6 : (-2) = -3 + 6 + 3 = 6$

10. Χρήσιμες Ιδιότητες

1) $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma = \beta + \gamma$

Μπορούμε να προσθέσουμε και στα δύο μέλη μιας ισότητας τον ίδιο αριθμό και επίσης μπορούμε από τα μέλη μιας ισότητας να διαγράψουμε (να αφαιρέσουμε) τον ίδιο αριθμό. Άρα :

$\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha - \gamma = \beta - \gamma$

2) $\alpha = \beta \stackrel{\gamma \neq 0}{\Leftrightarrow} \alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \gamma$

Μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη μιας ισότητας τον ίδιο αριθμό και επίσης μπορούμε από τα μέλη μιας ισότητας να **διαγράψουμε** (να διαιρέσουμε με) τον ίδιο **μη μηδενικό** παράγοντα.

$\alpha = \beta \stackrel{\gamma \neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\gamma}$

Προσοχή : στην ισότητα $\alpha \cdot 0 = \beta \cdot 0$ δεν μπορώ να διαγράψω το 0.

Διότι $3 = \frac{6}{2} \Rightarrow 3 \cdot 0 = \frac{6}{2} \cdot 0$ Ισχύει, ενώ $3 \cdot 0 = 5 \cdot 0 \Rightarrow 3 = 5$ **ΔΕΝ ΙΣΧΥΕΙ**

3) $\left. \begin{matrix} \alpha = \beta \\ \gamma = \delta \end{matrix} \right\} \Rightarrow \alpha + \gamma = \beta + \delta$ Μπορούμε να προσθέσουμε δύο ισότητες κατά μέλη

4) $\left. \begin{matrix} \alpha = \beta \\ \gamma = \delta \end{matrix} \right\} \Rightarrow \alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \delta$ Μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε δύο ισότητες κατά μέλη

5) $\alpha \cdot \beta = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \text{ή} \\ \beta = 0 \end{cases}$ Αν ένα γινόμενο είναι 0 τότε ένας ή περισσότεροι παράγοντες είναι 0

6) $\alpha \cdot \beta \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \neq 0 \\ \beta \neq 0 \end{cases}$

Τα σύμβολα { και } συνδέουν δύο ή περισσότερες σχέσεις που ισχύουν (αληθεύουν) ταυτόχρονα (σύζευξη). Δηλαδή αντί να γράψω $\alpha=2$ και $\beta=3$, μπορώ να γράψω $\begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 3 \end{cases}$

Αν αληθεύει (ισχύει) μόνο μία (ή τουλάχιστον μία) από τις σχέσεις, τότε βάζω “ή” ανάμεσα

τους. Π.χ. $\begin{cases} \chi = 1 \\ \text{ή} \\ \chi = 2 \end{cases}$ (Προσοχή η σχέση $\begin{cases} \chi = 1 \\ \chi = 2 \end{cases}$ δεν ισχύει (είναι αδύνατο))

11. Ιδιότητες Αναλογιών

Λέμε ότι οι αριθμοί α , γ είναι ανάλογοι των αριθμών β , δ όταν ισχύει $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, που λέγεται αναλογία

$$\begin{aligned}
 1) \quad & \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha \cdot \delta = \beta \cdot \gamma \Leftrightarrow \alpha = \frac{\beta\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \beta = \frac{\alpha\delta}{\gamma} \Leftrightarrow \gamma = \frac{\alpha\delta}{\beta} \Leftrightarrow \delta = \frac{\beta\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow \frac{\alpha\delta}{\beta\gamma} = 1 \\
 & \Leftrightarrow \frac{\alpha+\beta}{\beta} = \frac{\gamma+\delta}{\delta} \Leftrightarrow \frac{|\alpha-\beta|}{\beta} = \frac{|\gamma-\delta|}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\alpha+\beta} = \frac{\gamma}{\gamma+\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{|\alpha-\beta|} = \frac{\gamma}{|\gamma-\delta|} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta} \\
 & \Leftrightarrow \frac{\alpha+\gamma}{\gamma} = \frac{\beta+\delta}{\delta} \Leftrightarrow \frac{|\alpha-\gamma|}{\gamma} = \frac{|\beta-\delta|}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\alpha+\gamma} = \frac{\beta}{\beta+\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{|\alpha-\gamma|} = \frac{\beta}{|\beta-\delta|} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\delta}{\gamma} \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha\delta} = \frac{1}{\beta\gamma} \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} = \frac{\delta}{\beta\gamma} \Leftrightarrow \frac{1}{\beta} = \frac{\gamma}{\alpha\delta} \Leftrightarrow \frac{1}{\gamma} = \frac{\beta}{\alpha\delta} \Leftrightarrow \frac{1}{\delta} = \frac{\alpha}{\beta\gamma} \Leftrightarrow \frac{\beta\gamma}{\alpha\delta} = 1 \\
 & \Leftrightarrow \frac{\beta}{\alpha+\beta} = \frac{\delta}{\gamma+\delta} \Leftrightarrow \frac{\beta}{|\alpha-\beta|} = \frac{\delta}{|\gamma-\delta|} \Leftrightarrow \frac{\alpha+\beta}{\alpha} = \frac{\gamma+\delta}{\gamma} \Leftrightarrow \frac{|\alpha-\beta|}{\alpha} = \frac{|\gamma-\delta|}{\gamma} \Leftrightarrow \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\delta}{\beta} \\
 & \Leftrightarrow \frac{\gamma}{\alpha+\gamma} = \frac{\delta}{\beta+\delta} \Leftrightarrow \frac{\gamma}{|\alpha-\gamma|} = \frac{\delta}{|\beta-\delta|} \Leftrightarrow \frac{\alpha+\gamma}{\alpha} = \frac{\beta+\delta}{\beta} \Leftrightarrow \frac{|\alpha-\gamma|}{\alpha} = \frac{|\beta-\delta|}{\beta}
 \end{aligned}$$

Υπενθύμιση : $|\alpha - \beta| = |\beta - \alpha|$ (Πάντα υποθέτουμε ότι όλοι οι παρονομαστές είναι διάφοροι του 0)

$$2) \quad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\varepsilon}{\zeta} = \dots = \frac{\chi}{\psi} = \frac{\alpha+\gamma+\varepsilon+\dots+\chi}{\beta+\delta+\zeta+\dots+\psi}$$

12. Μέθοδος επίλυσης αναλογιών

Για να λύσω οποιαδήποτε άσκηση με αναλογίες θέτω τον λόγο της αναλογίας ίσο με λ και έχω :

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\varepsilon}{\zeta} = \lambda \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{\alpha}{\beta} = \lambda \\ \frac{\gamma}{\delta} = \lambda \\ \frac{\varepsilon}{\zeta} = \lambda \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \alpha = \lambda \cdot \beta \\ \gamma = \lambda \cdot \delta \\ \varepsilon = \lambda \cdot \zeta \end{array} \right\} \quad (1)$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (1) αποδεικνύεται η άσκηση. (Βλέπε παρακάτω παράδειγμα)

Παραδείγματα

1. Αν $\frac{X}{y} = \frac{X+Z}{y+\varphi}$ να αποδείξετε ότι : $\frac{X}{y} = \frac{Z}{\varphi}$, $y\varphi(y+\varphi) \neq 0$

Λύση :

Ονομάζω τον λόγο της αναλογίας λ και έχω :

$$\frac{X}{y} = \frac{X+Z}{y+\varphi} = \lambda \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{X}{y} = \lambda \\ \frac{X+Z}{y+\varphi} = \lambda \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} X = \lambda \cdot y \\ X+Z = \lambda(y+\varphi) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} X = \lambda \cdot y \\ \lambda y + Z = \lambda y + \lambda\varphi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} X = \lambda y \\ Z = \lambda\varphi \end{array} \right\} \quad (1)$$

Παίρνω το δεύτερο μέλος της ισότητας που θέλω να αποδείξω και έχω :

$$\frac{Z}{\varphi} \stackrel{(1)}{=} \frac{\lambda\varphi}{\varphi} = \lambda = \frac{X}{y}$$

2ος Τρόπος :

Η σχέση (1) μας δίνει :

$$(1) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{X}{y} = \lambda \\ \frac{Z}{\varphi} = \lambda \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{X}{y} = \frac{Z}{\varphi}$$

Ασκήσεις

51. Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις αν είναι Σωστή (Σ) ή Λάθος (Λ).

1.	Δύο αριθμοί με γινόμενο θετικό και άθροισμα θετικό είναι θετικοί.	Σ	Λ
2.	Παρονομαστής ενός κλάσματος μπορεί να είναι οποιοσδήποτε φυσικός αριθμός.	Σ	Λ
3.	Όλοι οι αριθμοί έχουν αντίστροφο.	Σ	Λ
4.	Το γινόμενο δύο αντίστροφων είναι πάντα θετικό.	Σ	Λ
5.	Το γινόμενο δύο αντίθετων είναι πάντα θετικό.	Σ	Λ
6.	Δύο αριθμοί έχουν γινόμενο 0. Άρα ένας από τους δύο είναι 0.	Σ	Λ
7.	Κανένας από δύο αντίστροφους αριθμούς δεν είναι 0.	Σ	Λ
8.	$\alpha, \beta \neq 0$ με $\alpha + \beta = 0 \Rightarrow \alpha \cdot \beta < 0$.	Σ	Λ
9.	$\frac{\alpha}{\beta} < 0 \Rightarrow \alpha, \beta$ αρνητικοί.	Σ	Λ
10.	Δύο αντίθετοι αριθμοί είναι και αντίστροφοι.	Σ	Λ
11.	$\alpha \cdot \beta > 0 \Rightarrow \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\beta} > 0$.	Σ	Λ
12.	Οι αριθμοί α, β είναι αντίστροφοι $\Rightarrow \alpha \neq 0$ και $\beta \neq 0$.	Σ	Λ

52. Στα παρακάτω ζευγάρια να συμπληρώσετε τα κενά με ένα από τα σύμβολα $>$ ή $<$.

1. -14.....-19	2. -8.....-9,6	3. 0.....-28	4. $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$
5. 0.....13	6. -11.....0	7. -5.....-3	8. $-\frac{5}{6}$ $-\frac{1}{6}$
9. -7.....-12	10. 11.....-11	11. 9.....7	12. $-\frac{3}{5}$ $-\frac{2}{5}$
13. -21.....-43	14. 8.....-12	15. $\frac{1}{4}$ $\frac{2}{5}$	16. -23.....-32
17. -4.....-5,7	18. 0.....-27	19. $-\frac{5}{7}$ $-\frac{6}{7}$	20. $-\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{3}$
21. -11.....-14	22. -23.....56	23. $-\frac{5}{3}$ $-\frac{1}{3}$	24. $\frac{1}{12}$ $\frac{1}{13}$
25. $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{3}$	26. $-\frac{1}{5}$ $-\frac{1}{3}$	27. $-\frac{1}{2}$ $-\frac{3}{4}$	28. $\frac{6}{5}$ $\frac{3}{4}$

53. Να γίνουν οι πράξεις :

1. -3+2	2. +7-5	3. -3-4	4. $-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}$	5. -1-2
6. $-\frac{1}{2} - \frac{5}{2}$	7. -3-1	8. -4+2	9. -1-1	10. -5+2
11. -6-3	12. +3+2	13. -1-6	14. -3+4	15. $-\frac{3}{2} - \frac{5}{2}$
16. -7-5	17. $-\frac{1}{2} + \frac{5}{2}$	18. -1+2	19. -4+9	20. -4-1
21. -3+1	22. -5-1	23. -4-2	24. $-\frac{3}{2} + \frac{5}{2}$	25. -9+8
26. -5-2	27. $-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}$	28. -9+3	29. -2+1	30. -6+3
31. -4+3	32. -1+1	33. -3-2	34. $-\frac{3}{2} + \frac{1}{2}$	35. -1+3

36.	$-\frac{5}{2} + \frac{3}{2}$	37.	$-7+5$	38.	$-9+8$	39.	$-2+5$	40.	$-4-9$
41.	$-5+1$	42.	$-9-7$	43.	$-\frac{5}{2} + \frac{1}{2}$	44.	$+3-2$	45.	$-8+9$
46.	$-9-5$	47.	$-1+6$	48.	$-4+1$	49.	$-\frac{3}{2} - \frac{7}{2}$	50.	$-2+4$
51.	$-1+2$	52.	$-11-9$	53.	$-9-3$	54.	$-16+9$	55.	$-\frac{5}{2} - \frac{7}{2}$
56.	$-3+6$	57.	$-\frac{3}{2} + \frac{7}{2}$	58.	$-13-9$	59.	$-9+4$	60.	$-11+9$
61.	$-2-5$	62.	$-6+1$	63.	$-7+9$	64.	$-1+4$	65.	$-\frac{7}{2} + \frac{3}{2}$
66.	$-\frac{5}{2} + \frac{7}{2}$	67.	$-9+5$	68.	$-13+9$	69.	$+8-9$	70.	$-16-9$
71.	$-1+5$	72.	$-9+11$	73.	$-3+9$	74.	$-\frac{7}{2} + \frac{5}{2}$	75.	$-5+9$
76.	$-9-8$	77.	$-\frac{9}{2} - \frac{7}{2}$	78.	$-2+5$	79.	$-9+15$	80.	$-13+8$
81.	$-9+7$	82.	$-15+9$	83.	$-9+16$	84.	$-8+9$	85.	$-\frac{9}{2} + \frac{7}{2}$
86.	$-5+2$	87.	$-9+13$	88.	$-\frac{7}{2} + \frac{9}{2}$	89.	$-8+13$	90.	$-14+7$
91.	$-13-8$	92.	$+\frac{9}{2} + \frac{7}{2}$	93.	$-14-7$	94.	$-9-15$	95.	$-7+14$

54. Να γίνουν οι πράξεις :

1.	$-\frac{1}{3} + \frac{2}{3}$	2.	$13-19$	3.	$12+27$	4.	$-15+9$	5.	$-\frac{1}{4} + \frac{5}{4}$
6.	$-12+27$	7.	$-\frac{6}{5} + \frac{4}{5}$	8.	$-19+15$	9.	$-\frac{3}{5} - \frac{4}{5}$	10.	$-43+19$
11.	$-\frac{13}{7} + \frac{9}{7}$	12.	$-18+36$	13.	$-\frac{1}{3} - \frac{2}{3}$	14.	$-19-13$	15.	$-15-29$
16.	$-15-9$	17.	$-\frac{3}{5} + \frac{4}{5}$	18.	$-43-19$	19.	$-27+12$	20.	$-\frac{6}{5} - \frac{4}{5}$
21.	$-23+48$	22.	$-13+19$	23.	$-\frac{13}{8} - \frac{9}{8}$	24.	$-25-33$	25.	$-\frac{2}{3} + \frac{1}{3}$
26.	$-\frac{4}{5} + \frac{3}{5}$	27.	$-27-12$	28.	$-17+35$	29.	$-\frac{3}{4} - \frac{5}{4}$	30.	$-19+43$
31.	$-19-15$	32.	$-\frac{1}{3} - \frac{4}{3}$	33.	$-9+15$	34.	$-16-27$	35.	$\frac{7}{2} - \frac{19}{2}$
36.	$-\frac{4}{5} + \frac{6}{5}$	37.	$-16+29$	38.	$-\frac{4}{3} - \frac{2}{3}$	39.	$-15+32$	40.	$-18-27$
41.	$\frac{6}{7} - \frac{11}{7}$	42.	$-18-36$	43.	$-14+8$	44.	$-\frac{1}{3} + \frac{4}{3}$	45.	$-17+25$
46.	$23-15$	47.	$-\frac{3}{4} + \frac{5}{4}$	48.	$-15+19$	49.	$-14-8$	50.	$-\frac{4}{3} + \frac{2}{3}$
51.	$-\frac{4}{3} + \frac{1}{3}$	52.	$-29+15$	53.	$32-23$	54.	$-\frac{5}{4} + \frac{3}{4}$	55.	$-21+12$
56.	$-32+15$	57.	$-25+33$	58.	$-\frac{4}{3} + \frac{2}{3}$	59.	$-5+24$	60.	$-23-48$

61.	$-17-35$	62.	$-\frac{2}{3}+\frac{4}{3}$	63.	$-8-13$	64.	$-29+16$	65.	$-16+27$
66.	$\frac{42}{13}-\frac{34}{13}$	67.	$-18+27$	68.	$-25+17$	69.	$-\frac{4}{3}-\frac{2}{3}$	70.	$-25+16$
71.	$-15-32$	72.	$-27+16$	73.	$-\frac{5}{3}-\frac{4}{3}$	74.	$-23+15$	75.	$-\frac{23}{11}-\frac{10}{11}$
76.	$-48+23$	77.	$-\frac{2}{3}+\frac{4}{3}$	78.	$-33+24$	79.	$-33+25$	80.	$-27+19$
81.	$-\frac{11}{6}+\frac{5}{6}$	82.	$-62+44$	83.	$-36+18$	84.	$-\frac{5}{3}+\frac{4}{3}$	85.	$-5-18$
86.	$-13-24$	87.	$-15+29$	88.	$-\frac{4}{3}+\frac{5}{3}$	89.	$-27+18$	90.	$-\frac{26}{9}+\frac{8}{9}$
91.	$-\frac{2}{5}-\frac{9}{5}$	92.	$-25-17$	93.	$-29-16$	94.	$-\frac{17}{7}-\frac{11}{7}$	95.	$-35+17$

55. Γράψτε σε κάθε τετραγωνάκι το κατάλληλο πρόσημο ώστε να προκύψουν αληθείς ισότητες.

1.	$\square 7-6=-13$	2.	$11\square 8=3$	3.	$\square 28+17=-11$	4.	$-49\square 53=-102$
5.	$\square 17\square 6=-11$	6.	$\square 20\square 7=13$	7.	$\square 60+14=\square 46$	8.	$-6\square 7=\square 13$

56. Ποιόν αριθμό πρέπει να προσθέσουμε
 α) στον + 5 για να βρούμε άθροισμα -9
 γ) στον +12 για να βρούμε άθροισμα -2

β) στον -6 για να βρούμε άθροισμα -4
 δ) στον -10 για να βρούμε άθροισμα +4

57. Να γίνουν οι πράξεις :

1.	$\frac{1}{2}+\frac{1}{3} =$	2.	$-\frac{1}{4}+\frac{1}{3} =$	3.	$-\frac{1}{3}-\frac{1}{5} =$
4.	$\frac{3}{4}+\frac{2}{3} =$	5.	$-\frac{3}{2}-\frac{4}{3} =$	6.	$\frac{3}{2}-\frac{2}{3} =$
7.	$-\frac{1}{4}-\frac{1}{3} =$	8.	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4} =$	9.	$\frac{3}{2}+\frac{4}{3} =$
10.	$\frac{2}{5}-\frac{3}{4} =$	11.	$\frac{1}{2}-\frac{1}{3} =$	12.	$\frac{4}{3}-\frac{2}{5} =$
13.	$\frac{1}{3}+\frac{1}{5} =$	14.	$\frac{3}{2}-\frac{1}{7} =$	15.	$-\frac{2}{3}-\frac{3}{5} =$
16.	$\frac{5}{2}+\frac{3}{8} =$	17.	$\frac{3}{4}-\frac{2}{3} =$	18.	$\frac{3}{2}+\frac{1}{7} =$
19.	$-\frac{3}{2}+\frac{4}{5} =$	20.	$-\frac{2}{3}+\frac{5}{6} =$	21.	$-\frac{2}{5}+\frac{3}{4} =$
22.	$\frac{3}{2}+\frac{2}{3} =$	23.	$\frac{4}{3}+\frac{2}{5} =$	24.	$\frac{3}{2}-\frac{4}{5} =$
25.	$\frac{5}{2}-\frac{3}{8} =$	26.	$\frac{2}{3}+\frac{3}{5} =$	27.	$\frac{3}{2}+\frac{5}{6} =$
28.	$\frac{1}{2}-\frac{1}{4} =$	29.	$-\frac{3}{2}-\frac{5}{6} =$	30.	$\frac{2}{3}-\frac{5}{6} =$
31.	$\frac{-3}{5}+\frac{1}{-6} =$	32.	$\frac{-3}{5}-\frac{1}{-6} =$	33.	$\frac{-5}{8}+\frac{3}{-4} =$
34.	$\frac{-5}{8}-\frac{3}{-4} =$	35.	$-\frac{3}{5}+\frac{7}{9} =$	36.	$-\frac{8}{9}-\frac{2}{3} =$

58. Να βρείτε τα αθροίσματα :

1.	$(+15) + (37)$	2.	$(-9,2) + (+9,2) + (-1,3)$	3.	$(-6) + (+19)$
4.	$(-17) + (+9,5)$	5.	$(+6) + (-12)$	6.	$(+7) + (-16)$
7.	$(+2) + \left(-\frac{3}{5}\right)$	8.	$(-2,5) + \left(+\frac{5}{2}\right)$	9.	$\left(-\frac{9}{2}\right) + \left(-\frac{3}{2}\right)$
10.	$(-5) + (+4)$	11.	$(+6) + (-7)$	12.	$(-12) + (+9)$
13.	$\left(-\frac{3}{4}\right) + (+2)$	14.	$\left(+\frac{2}{3}\right) + (-4)$	15.	$(-2) + \left(-\frac{5}{3}\right)$
16.	$(-6) + (-7)$	17.	$(+13) + (-9)$	18.	$(-8) + (+15)$
19.	$(+23) + (61)$	20.	$(-9,6) + (-2,5)$	21.	$(-3) + (+18)$
22.	$(+6,5) + \left(-\frac{4}{5}\right)$	23.	$(-3,5) + \left(+\frac{7}{2}\right)$	24.	$(-4,2) + \left(+\frac{3}{5}\right)$
25.	$(-19) + (+16,7)$	26.	$(-13,5) + (+2,3)$	27.	$(+19,5) + (-4,4)$
28.	$(+9) + (+7)$	29.	$(+7) + (-9)$	30.	$(-9) + (-7)$
31.	$(+42) + (+36)$	32.	$(+46) + (+39)$	33.	$(-46) + (+39)$
34.	$(+37) + (-28)$	35.	$(+19) + (+28)$	36.	$(+27) + (-16)$
37.	$(+27) + (+16)$	38.	$(-46) + (-39)$	39.	$(+34) + (+27)$
40.	$(+46) + (-39)$	41.	$(+19) + (-28)$	42.	$(+37) + (+28)$
43.	$(+34) + (-27)$	44.	$(+86) + (+45)$	45.	$(+86) + (-45)$
46.	$(-19) + (+28)$	47.	$(+42) + (-36)$	48.	$(-19) + (-28)$
49.	$(-37) + (-28)$	50.	$(-27) + (+16)$	51.	$(-86) + (+45)$
52.	$\left(+\frac{1}{2}\right) + \left(+\frac{1}{3}\right)$	53.	$\left(+\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right)$	54.	$\left(-\frac{1}{2}\right) + \left(+\frac{1}{3}\right)$
55.	$(-27) + (-16)$	56.	$(-34) + (+27)$	57.	$(-37) + (+28)$
58.	$\left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right)$	59.	$\left(+\frac{1}{2}\right) + \left(+\frac{1}{4}\right)$	60.	$\left(+\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{4}\right)$
61.	$(-34) + (-27)$	62.	$(-86) + (-45)$	63.	$(+19,5) + (+22,6)$
64.	$\left(-\frac{1}{2}\right) + \left(+\frac{1}{4}\right)$	65.	$\left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{4}\right)$	66.	$\left(+\frac{1}{3}\right) + \left(+\frac{1}{4}\right)$
67.	$\left(+\frac{1}{4}\right) + \left(+\frac{2}{5}\right)$	68.	$\left(+\frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{2}{5}\right)$	69.	$\left(-\frac{1}{4}\right) + \left(+\frac{2}{5}\right)$
70.	$\left(+\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{4}\right)$	71.	$\left(-\frac{1}{3}\right) + \left(+\frac{1}{4}\right)$	72.	$\left(-\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{4}\right)$
73.	$\left(-\frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{2}{5}\right)$	74.	$\left(+\frac{3}{4}\right) + \left(+\frac{5}{6}\right)$	75.	$\left(+\frac{3}{4}\right) + \left(-\frac{5}{6}\right)$
76.	$\left(+\frac{1}{2}\right) + \left(+\frac{3}{8}\right)$	77.	$\left(+\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{3}{8}\right)$	76.	$\left(-\frac{1}{2}\right) + \left(+\frac{3}{8}\right)$
79.	$\left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{3}{8}\right)$	80.	$\left(+\frac{1}{3}\right) + \left(+\frac{2}{5}\right)$	81.	$\left(+\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{2}{5}\right)$
82.	$\left(-\frac{1}{3}\right) + \left(+\frac{2}{5}\right)$	83.	$\left(-\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{2}{5}\right)$	84.	$\left(-\frac{3}{4}\right) + \left(+\frac{5}{6}\right)$

59. Να υπολογιστούν οι παραστάσεις :

1.	$(-3) - (+9) =$	2.	$(-17) - (-28) =$	3.	$(+11) - (-8) =$
4.	$(-5) - (+3) =$	5.	$(-32) - (+32) =$	6.	$(-27) - (+11) =$
7.	$(+37) - (+46) =$	8.	$0 - (+5) =$	9.	$(-14) - (-83) =$
10.	$(-50) - (-50) =$	11.	$(+32) - (-17) =$	12.	$(+32) - (+17) =$
13.	$(-5) - (-16) =$	14.	$(+5) - (-16) =$	15.	$(+5) - (+16) =$
16.	$(-9) - (+5) =$	17.	$(-9) - (-5) =$	18.	$(+9) - (+5) =$

19.	$0 - (-11) =$	20.	$0 - (+11) =$	21.	$(+11) - 0 =$
22.	$\left(-\frac{1}{3}\right) - \left(+\frac{2}{3}\right)$	23.	$\left(+\frac{42}{13}\right) - \left(+\frac{34}{13}\right)$	24.	$\left(-\frac{6}{7}\right) - \left(-\frac{11}{7}\right)$
25.	$(-5) - (-19) =$	26.	$(-23) - (+15) =$	27.	$(-12) - (-27) =$
28.	$\left(-\frac{2}{5}\right) - \left(-\frac{9}{5}\right)$	29.	$\left(-\frac{13}{7}\right) - \left(+\frac{9}{7}\right)$	30.	$\left(-\frac{7}{2}\right) - \left(-\frac{19}{2}\right)$
31.	$\left(-\frac{1}{3}\right) - \left(+\frac{2}{5}\right)$	32.	$\left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{5}{3}\right)$	33.	$-\frac{13}{3} + \frac{9}{2}$
34.	$\left(-\frac{2}{5}\right) - \left(-\frac{9}{4}\right)$	35.	$\left(-\frac{13}{7}\right) - \left(-\frac{3}{2}\right)$	36.	$\left(-\frac{1}{3}\right) - \left(+\frac{5}{6}\right)$
37.	$\left(-\frac{7}{4}\right) - \left(-\frac{19}{2}\right)$	38.	$-\frac{13}{6} + \frac{9}{2}$	39.	$-\frac{1}{3} + \frac{2}{5} - \frac{3}{2}$
40.	$-\frac{13}{4} + \frac{9}{2} + \frac{1}{3}$	41.	$-\frac{1}{4} + \frac{3}{5} + \frac{5}{2}$	42.	$-\frac{11}{6} + \frac{7}{2} + \frac{5}{3}$

60. Να υπολογιστούν τα γινόμενα :

1.	$(-2)(-12)$	2.	$(-24)(+4)$	3.	$(-3)(+11)$	4.	$\left(+\frac{18}{23}\right)\left(-\frac{23}{6}\right)$
5.	$(+2)(-13)$	6.	$(-3)(+12)$	7.	$(-2)(+14)$	8.	$(+3)(-25)$
9.	$(-3)(+6)$	10.	$(-7)(+3)$	11.	$(+9)(-6)$	12.	$(-8)(+7)$
13.	$(-12)(-4)$	14.	$(+3)(-13)$	15.	$(+3)(-15)$	16.	$(-4)(-14)$
17.	$(-2)(+16)$	18.	$(-5)(-11)$	19.	$(+5)(-12)$	20.	$(-4)(-15)$
21.	$(-4)(-6)$	22.	$(-2)(+8)$	23.	$(-8)(+9)$	24.	$(-3)(-9)$
25.	$(-6)(-12)$	26.	$(-4)(-13)$	27.	$(-5)(+15)$	28.	$(-22)(+4)$
29.	$(+6)(-15)$	30.	$(-19)(-2)$	31.	$(-3)(-16)$	32.	$(+25)(-6)$
33.	$(-2)(+7)$	34.	$(-2)(+9)$	35.	$(-7)(+5)$	36.	$(-3)(-8)$
37.	$(+4)(-9)$	38.	$(-6)(+5)$	39.	$(-6)(-9)$	40.	$(-7)(+9)$
41.	$(+4)(-16)$	42.	$(-25)(-2)$	43.	$(-2)(+17)$	44.	$(+23)(-2)$
45.	$(-21)(+2)$	46.	$(-19)(+2)$	47.	$(+22)(-3)$	48.	$(-9)(+7)$
49.	$(-4)(-17)$	50.	$(-7)(+6)$	51.	$(-6)(+6)$	52.	$(-2)(+18)$
53.	$(-8)(+4)$	54.	$(-9)(+5)$	55.	$(-11)(+11)$	56.	$(-9)(-9)$
57.	$(-18)(+4)$	58.	$(-2)(-22)$	59.	$(-24)(+2)$	60.	$(-13)(+13)$
61.	$(-25)(+4)$	62.	$(-4)(+7)$	63.	$(+5)(-8)$	64.	$(-5)(-25)$
65.	$(-6)(+7)$	66.	$(-12)(-12)$	67.	$(-14)(+14)$	68.	$(-23)(+2)$
69.	$(+8)(-8)$	70.	$(-7)(+7)$	71.	$(+6)(-8)$	72.	$(-15)(+15)$
73.	$\left(-\frac{1}{2}\right)\left(+\frac{4}{3}\right)$	74.	$\left(-\frac{2}{3}\right)\left(+\frac{3}{4}\right)$	75.	$\left(-\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{4}{6}\right)$	76.	$\left(+\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{10}{5}\right)$
77.	$\left(-\frac{7}{3}\right)\left(-\frac{6}{14}\right)$	78.	$\left(+\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{5}{6}\right)$	79.	$\left(-\frac{1}{4}\right)\left(+\frac{2}{3}\right)$	80.	$\left(-\frac{5}{3}\right)\left(-\frac{9}{10}\right)$
81.	$\left(-\frac{3}{4}\right)\left(+\frac{4}{6}\right)$	82.	$\left(-\frac{8}{3}\right)\left(-\frac{6}{16}\right)$	83.	$\left(-\frac{12}{10}\right)\left(+\frac{5}{4}\right)$	84.	$\left(+\frac{3}{9}\right)\left(-\frac{26}{13}\right)$
85.	$\left(-\frac{11}{2}\right)\left(-\frac{8}{22}\right)$	86.	$\left(-\frac{14}{7}\right)\left(-\frac{6}{18}\right)$	87.	$\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)$	88.	$\left(-\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{5}{6}\right)$
89.	$\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{3}{4}\right)$	90.	$\left(-\frac{5}{3}\right)\left(+\frac{9}{10}\right)$	91.	$\left(+\frac{9}{17}\right)\left(-\frac{17}{6}\right)$	92.	$\left(-\frac{12}{13}\right)\left(+\frac{13}{4}\right)$
93.	$\left(-\frac{12}{11}\right)\left(+\frac{11}{4}\right)$	94.	$\left(-\frac{7}{3}\right)\left(+\frac{6}{14}\right)$	95.	$\left(-\frac{18}{13}\right)\left(-\frac{26}{9}\right)$	96.	$\left(+\frac{18}{23}\right)\left(-\frac{23}{9}\right)$

61. Να συμπληρωθούν τα αποτελέσματα των διαιρέσεων :

1.	$(-4):(+2)=$	2.	$(+10):(+5)=$	3.	$(+6):(-3)=$	4.	$(+8):(+2)=$
5.	$(+12):(-3)=$	6.	$(-4):(-2)=$	7.	$(+26):(-13)=$	8.	$(+15):(+3)=$
9.	$(+6):(+3)=$	10.	$(+12):(-6)=$	11.	$(+8):(-2)=$	12.	$(+12):(+2)=$
13.	$(+24):(+8)=$	14.	$(+6):(-2)=$	15.	$(-6):(-3)=$	16.	$(+21):(-7)=$
17.	$(+4):(+2)=$	18.	$(-8):(+2)=$	19.	$(+10):(+2)=$	20.	$(+16):(-2)=$
21.	$(+9):(+3)=$	22.	$(+18):(+3)=$	23.	$(-12):(+3)=$	24.	$(-6):(+3)=$
25.	$(+6):(+2)=$	26.	$(+8):(+4)=$	27.	$(+4):(-2)=$	28.	$(+27):(+9)=$
29.	$(+33):(+11)=$	30.	$(+9):(-3)=$	31.	$(+24):(+3)=$	32.	$(-30):(+2)=$
33.	$(+10):(-5)=$	34.	$(-6):(-2)=$	35.	$(+8):(-4)=$	36.	$(-12):(+6)=$
37.	$(+15):(-3)=$	38.	$(+36):(+3)=$	39.	$(+27):(+3)=$	40.	$(+16):(+4)=$
41.	$(-8):(-2)=$	42.	$(+12):(+3)=$	43.	$(-6):(+2)=$	44.	$(-12):(-3)=$
45.	$(+21):(+7)=$	46.	$(+10):(-2)=$	47.	$(+20):(+4)=$	48.	$(-8):(+4)=$
49.	$(+12):(-2)=$	50.	$(-9):(+3)=$	51.	$(-12):(-6)=$	52.	$(+24):(-3)=$
53.	$(+27):(-9)=$	54.	$(-8):(-4)=$	55.	$(+33):(-11)=$	56.	$(-16):(+2)=$
57.	$(-10):(+2)=$	58.	$(-27):(+9)=$	59.	$(-10):(+5)=$	60.	$(-9):(-3)=$
61.	$(+16):(-4)=$	62.	$(-15):(+3)=$	63.	$(-18):(-9)=$	64.	$(+16):(-8)=$
65.	$(+12):(+6)=$	66.	$(-10):(-2)=$	67.	$(-24):(+3)=$	68.	$(-27):(-9)=$
69.	$(+12):(+4)=$	70.	$(+18):(-3)=$	71.	$(-12):(+2)=$	72.	$(-15):(-3)=$
73.	$(-10):(-5)=$	74.	$(-26):(+13)=$	75.	$(+12):(-4)=$	76.	$(-12):(-2)=$
77.	$(+24):(-8)=$	78.	$(-16):(+8)=$	79.	$(-30):(+2)=$	80.	$(-18):(+3)=$

62. Να συμπληρωθούν τα αποτελέσματα των διαιρέσεων :

1.	$(-12):(+4)=$	2.	$(+16):(+8)=$	3.	$(+30):(-2)=$	4.	$(-16):(-8)=$
5.	$(+14):(+2)=$	6.	$(+15):(+5)=$	7.	$(+21):(+3)=$	8.	$(+18):(+6)=$
9.	$(-18):(-3)=$	10.	$(-21):(+7)=$	11.	$(+14):(+7)=$	12.	$(+15):(-5)=$
13.	$(-16):(+4)=$	14.	$(+18):(-9)=$	15.	$(+33):(+3)=$	16.	$(+22):(-2)=$
17.	$(+16):(+2)=$	18.	$(-21):(+3)=$	19.	$(-18):(+9)=$	20.	$(+20):(-4)=$
21.	$(-26):(-13)=$	22.	$(-15):(+5)=$	23.	$(-16):(-4)=$	24.	$(+18):(-6)=$
25.	$(-21):(-7)=$	26.	$(+14):(-2)=$	27.	$(-12):(-4)=$	28.	$(-24):(+8)=$
29.	$(+18):(+2)=$	30.	$(+27):(-3)=$	31.	$(+22):(+2)=$	32.	$(-21):(-3)=$
33.	$(+21):(-3)=$	34.	$(+24):(+6)=$	35.	$(-15):(-5)=$	36.	$(-14):(-7)=$
37.	$(+20):(+5)=$	38.	$(-16):(-2)=$	39.	$(-24):(-3)=$	40.	$(-28):(+4)=$
41.	$(-14):(+2)=$	42.	$(-24):(-8)=$	43.	$(+32):(+4)=$	44.	$(-18):(-2)=$
45.	$(-18):(+6)=$	46.	$(+28):(+7)=$	47.	$(-22):(-2)=$	48.	$(+36):(-3)=$
49.	$(+36):(+12)=$	50.	$(+18):(-2)=$	51.	$(+20):(-5)=$	52.	$(-28):(-14)=$
53.	$(+18):(+9)=$	54.	$(+24):(-6)=$	55.	$(-18):(-6)=$	56.	$(-27):(+3)=$
57.	$(+33):(-3)=$	58.	$(-22):(+2)=$	59.	$(+32):(+8)=$	60.	$(-20):(+5)=$
61.	$(+28):(+4)=$	62.	$(-33):(+11)=$	63.	$(-14):(-2)=$	64.	$(+36):(-9)=$
65.	$(+14):(-7)=$	66.	$(+36):(+4)=$	67.	$(+25):(-5)=$	68.	$(-28):(-14)=$
69.	$(-36):(+3)=$	70.	$(-18):(+2)=$	71.	$(-33):(+3)=$	72.	$(+44):(+4)=$

63. Να συμπληρωθούν τα αποτελέσματα των διαιρέσεων :

1.	$(-20):(+4)=$	2.	$(+24):(-12)=$	3.	$(+24):(+2)=$	4.	$(-33):(-11)=$
5.	$(+22):(-11)=$	6.	$(-33):(-3)=$	7.	$(+28):(-4)=$	8.	$(+24):(+12)=$
9.	$(+30):(+15)=$	10.	$(-20):(-4)=$	11.	$(-26):(+2)=$	12.	$(-28):(-7)=$
13.	$(+32):(-8)=$	14.	$(-22):(+11)=$	15.	$(+36):(-4)=$	16.	$(+24):(+4)=$
17.	$(+24):(-2)=$	18.	$(-36):(+12)=$	19.	$(-14):(+7)=$	20.	$(-26):(-2)=$
21.	$(-28):(-4)=$	22.	$(+32):(-4)=$	23.	$(-24):(-6)=$	24.	$(-30):(-6)=$
25.	$(+44):(-4)=$	26.	$(-24):(+2)=$	27.	$(+44):(-11)=$	28.	$(-22):(-11)=$
29.	$(+26):(-2)=$	30.	$(+30):(-15)=$	31.	$(-24):(+12)=$	32.	$(+35):(-7)=$
33.	$(-36):(-12)=$	34.	$(-36):(+4)=$	35.	$(-28):(+7)=$	36.	$(+28):(-14)=$
37.	$(+35):(+5)=$	38.	$(+26):(+2)=$	39.	$(+30):(+6)=$	40.	$(-32):(+8)=$

41.	$(-24):(-2)=$	42.	$(+24):(-4)=$	43.	$(+28):(+2)=$	44.	$(-36):(+9)=$
45.	$(-36):(-4)=$	46.	$(-32):(+4)=$	47.	$(-32):(-8)=$	48.	$(-25):(-5)=$
49.	$(-44):(+4)=$	50.	$(-24):(-12)=$	51.	$(-30):(+15)=$	52.	$(-28):(+2)=$
53.	$(+26):(+13)=$	54.	$(+40):(-5)=$	55.	$(+45):(+5)=$	56.	$(+55):(+11)=$
57.	$(-32):(-4)=$	58.	$(-30):(-2)=$	59.	$(-24):(+4)=$	60.	$(-30):(-15)=$
61.	$(+28):(-2)=$	62.	$(+35):(-5)=$	63.	$(+55):(+5)=$	64.	$(+45):(+9)=$
65.	$(-24):(-4)=$	66.	$(+28):(-7)=$	67.	$(-28):(-2)=$	68.	$(-36):(-9)=$
69.	$(-40):(-5)=$	70.	$(+45):(-9)=$	71.	$(-44):(+11)=$	72.	$(+45):(-5)=$
73.	$(+28):(+14)=$	74.	$(+36):(+9)=$	75.	$(-35):(+5)=$	76.	$(+36):(+6)=$
77.	$(-45):(+9)=$	78.	$(-25):(+5)=$	79.	$(-40):(+5)=$	80.	$(+55):(-11)=$

64. Να συμπληρωθούν τα αποτελέσματα των διαιρέσεων :

1.	$(+40):(+8)=$	2.	$(-35):(-5)=$	3.	$(-55):(-11)=$	4.	$(-45):(+5)=$
5.	$(+30):(+5)=$	6.	$(-45):(-9)=$	7.	$(+30):(-6)=$	8.	$(-35):(+7)=$
9.	$(-55):(+11)=$	10.	$(-35):(-7)=$	11.	$(+40):(-8)=$	12.	$(+55):(-5)=$
13.	$(+35):(+7)=$	14.	$(+42):(+6)=$	15.	$(-42):(+7)=$	16.	$(-40):(+8)=$
17.	$(+36):(-6)=$	18.	$(+30):(-5)=$	19.	$(+40):(+5)=$	20.	$(-45):(-5)=$
21.	$(-40):(-8)=$	22.	$(+48):(+6)=$	23.	$(+54):(+6)=$	24.	$(-48):(-6)=$
25.	$(-36):(+6)=$	26.	$(+42):(-6)=$	27.	$(-55):(+5)=$	28.	$(+42):(+7)=$
29.	$(-30):(-5)=$	30.	$(+48):(+8)=$	31.	$(-42):(+6)=$	32.	$(+54):(+9)=$
33.	$(-54):(-6)=$	34.	$(-36):(-6)=$	35.	$(+56):(+7)=$	36.	$(-55):(-5)=$
37.	$(+42):(-7)=$	38.	$(+49):(+7)=$	39.	$(-30):(+5)=$	40.	$(-42):(-6)=$
41.	$(-56):(-8)=$	42.	$(-42):(-7)=$	43.	$(-48):(+6)=$	44.	$(-48):(+8)=$
45.	$(+48):(-6)=$	46.	$(+54):(-9)=$	47.	$(+72):(-9)=$	48.	$(+81):(+9)=$
49.	$(+49):(-7)=$	50.	$(-56):(-7)=$	51.	$(+48):(-8)=$	52.	$(-54):(+6)=$
53.	$(-72):(-8)=$	54.	$(+72):(-8)=$	55.	$(-54):(+9)=$	56.	$(-72):(+8)=$
57.	$(-48):(-8)=$	58.	$(+54):(-6)=$	59.	$(-56):(+8)=$	60.	$(-54):(-9)=$
61.	$(-72):(+9)=$	62.	$(+81):(-9)=$	63.	$(-49):(+7)=$	64.	$(-64):(-8)=$
65.	$(-49):(-7)=$	66.	$(-64):(+8)=$	67.	$(-72):(-9)=$	68.	$(+56):(-7)=$
69.	$(-81):(+9)=$	70.	$(-56):(+7)=$	71.	$(+64):(+8)=$	72.	$(+72):(-9)=$
73.	$(+56):(+8)=$	74.	$(-81):(+9)=$	75.	$(-42):(+6)=$	76.	$(+64):(-8)=$
77.	$(+72):(+9)=$	78.	$(+72):(+8)=$	79.	$(+56):(-8)=$	80.	$(-81):(-9)=$

65. Να υπολογιστούν οι παραστάσεις :

1.	$\frac{-21}{3} =$	2.	$\frac{-25}{-5} =$	3.	$\frac{15}{-3} =$	4.	$\frac{-12}{-6} =$
5.	$\frac{-24}{3} =$	6.	$\frac{-49}{-7} =$	7.	$\frac{-12}{-4} =$	8.	$\frac{-56}{7} =$
9.	$-\frac{144}{12} =$	10.	$-\frac{18}{-6} =$	11.	$\frac{-28}{4} =$	12.	$-\frac{30}{5} =$
13.	$-\frac{36}{-4} =$	14.	$-\frac{36}{9} =$	15.	$-\frac{20}{-5} =$	16.	$-\frac{56}{8} =$
17.	$-\frac{42}{7} =$	18.	$\frac{-35}{-5} =$	19.	$-\frac{64}{8} =$	20.	$-\frac{24}{6} =$
21.	$-\frac{32}{8} =$	22.	$-\frac{63}{-7} =$	23.	$-\frac{72}{-9} =$	24.	$-\frac{35}{7} =$
25.	$-\frac{40}{-5} =$	26.	$-\frac{18}{3} =$	27.	$-\frac{18}{-9} =$	28.	$-\frac{16}{-8} =$
29.	$\frac{-30}{-6} =$	30.	$\frac{-28}{-7} =$	31.	$-\frac{32}{8} =$	32.	$\frac{-12}{-3} =$
33.	$-\frac{48}{-8} =$	34.	$-\frac{45}{-5} =$	35.	$-\frac{45}{9} =$	36.	$\frac{36}{-6} =$

37.	$-\frac{-15}{-5} =$	38.	$-\frac{-42}{6} =$	39.	$-\frac{-32}{4} =$	40.	$-\frac{21}{-7} =$
41.	$-\frac{-121}{11} =$	42.	$\frac{-27}{3} =$	43.	$\frac{-54}{-9} =$	44.	$\frac{-169}{-13} =$
45.	$-\frac{-72}{-8} =$	46.	$-\frac{48}{-6} =$	47.	$-\frac{24}{-8} =$	48.	$-\frac{-63}{9} =$
49.	$-\frac{-24}{-4} =$	50.	$-\frac{-14}{-7} =$	51.	$\frac{-54}{-6} =$	52.	$-\frac{-32}{8} =$
53.	$\frac{-3}{5} \cdot \frac{1}{-6} =$	54.	$\frac{-3}{5} : \frac{1}{-10} =$	55.	$\frac{-5}{8} \cdot \frac{3}{-4} =$	56.	$\frac{-5}{8} : \frac{3}{-4} =$

66. Να βρεθούν τα γινόμενα :

1.	$(-5) \cdot (-8) \left(-\frac{1}{5}\right)$	2.	$-\frac{2}{9} \cdot \left(-\frac{9}{2}\right) \left(-\frac{3}{5}\right)$
3.	$0 \cdot (-7,36)$	4.	$-8 \cdot \frac{5}{2}$
5.	$-7 \left(-\frac{1}{3}\right) (+3) \left(-\frac{1}{7}\right) \cdot 0 \cdot (-5) \frac{4}{3} \left(-3\frac{1}{4}\right)$	6.	$-5 \cdot (-3) \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{7}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot (-2) \frac{4}{2}$
7.	$-(-1) \cdot (-2) \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot 5 \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \frac{1}{7} \cdot 6$	8.	$\frac{4}{3} \cdot \frac{2}{5} \cdot (-1) \cdot (-2) \frac{4}{3} \cdot (-2) \cdot 1 \frac{1}{4}$
9.	$(-5) \cdot \left(-\frac{5}{6}\right) \cdot \left(+\frac{1}{5}\right) \cdot (-1) \cdot (-6) \cdot (-4)$	10.	$(-3,8) \cdot (-5) \cdot (-7) \cdot (-9 + 9) \cdot 11$
11.	$(-2) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(+\frac{1}{3}\right) \cdot (-1) \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) \cdot (-3)$	12.	$(-2,6) \cdot (-3,7) \cdot (-4) \cdot (-5 + 5) \cdot 8$

67. Σύμφωνα με την επιμεριστική ιδιότητα, να γίνουν με τον πιο σύντομο τρόπο οι πράξεις :

1.	$3,2(-3) + 6,8(-3)$	2.	$-\frac{3}{4} \left(+\frac{1}{6}\right) - \frac{3}{4} \left(+\frac{5}{6}\right)$
3.	$4 \cdot \frac{3}{2} + 4 \left(-\frac{4}{5}\right) + 4 \cdot (-0,7)$	4.	$-\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{3} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{6} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} - \frac{4}{5} \cdot 3$

68. Να βρεθούν τα αποτελέσματα των παρακάτω γινομένων :

1.	5·23	2.	6·32	3.	4·62	4.	12·21	5.	9·42
6.	13·24	7.	11·56	8.	7·27	9.	19·22	10.	18·33
11.	17·38	12.	29·32	13.	12·32	14.	5·32	15.	49·56
16.	6·43	17.	9·83	18.	6·92	19.	17·56	20.	4·93
21.	8·27	22.	5·41	23.	11·64	24.	6·45	25.	19·54
26.	7·48	27.	12·45	28.	4·88	29.	9·51	30.	6·62
31.	17·89	32.	6·51	33.	19·63	34.	5·63	35.	11·78
36.	5·38	37.	9·94	38.	7·57	39.	18·56	40.	5·67
41.	9·63	42.	12·63	43.	13·56	44.	4·97	45.	9·71
46.	7·68	47.	6·73	48.	5·49	49.	19·78	50.	4·73
51.	19·67	52.	7·79	53.	6·87	54.	5·58	55.	12·78
56.	6·79	57.	5·88	58.	18·79	59.	7·89	60.	8·93
61.	11·87	62.	9·78	63.	8·39	64.	18·87	65.	19·87
66.	8·53	67.	18·89	68.	17·69	69.	9·79	70.	8·42
71.	13·77	72.	8·69	73.	12·97	74.	11·89	75.	13·89
76.	8·78	77.	11·92	78.	19·86	79.	8·89	80.	9·89

69. Να βρεθεί η τιμή των παραστάσεων :

1.	$30 - 9 + 3(-5)$	2.	$30 - [9 + 3(-5)]$	3.	$(30 - 9) + 3(-5)$
4.	$(30 - 9 + 3)(-5)$	5.	$30 - (9 + 3)(-5)$	6.	$42 - 7 + 6(-8)$
7.	$42 - [7 + 6(-8)]$	8.	$(42 - 7) + 6(-8)$	9.	$(42 - 7 + 6) (-8)$
10.	$42 - (7 + 6)(-8)$	11.	$8 \cdot 32 - 12 : (-4)$	12.	$8[32 - 12 : (-4)]$
13.	$(8 \cdot 32 - 12) : (-4)$	14.	$[8 \cdot (32 - 12)] : (-4)$	15.	$8[(32 - 12) : (-4)]$

70. Να λυθούν οι εξισώσεις :

1.	$x + 11 = -13$	2.	$x + (-7) = -15$	3.	$x - (-2) = -6$	4.	$x - (+3) = -5$
5.	$x - 8 = -2$	6.	$x + \frac{4}{7} = \frac{3}{14}$	7.	$x - \frac{3}{4} = -\frac{7}{4}$	8.	$x + \frac{3}{2} = -\frac{5}{4}$
9.	$x - \frac{3}{5} = 1,2$	10.	$x + 5 = -4$	11.	$2x - \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$	12.	$4x - \frac{7}{3} = \frac{5}{3}$
13.	$-5x = 45$	14.	$18x = 27$	15.	$x(-14) = 42$	16.	$x : (-3) = 27$
17.	$\frac{3}{4}x = -\frac{5}{8}$	18.	$x : \left(-\frac{3}{5}\right) = -25$	19.	$\frac{x}{12} = -4$	20.	$-\frac{3}{5}x = -\frac{9}{10}$
21.	$8x - \frac{2}{3} = \frac{2}{5}$	22.	$\frac{5}{3}x = -\frac{15}{9} - \frac{5}{18}$	23.	$\frac{17}{4}x = \frac{2}{3} + \frac{3}{4}$	24.	$\frac{7}{10}x = \frac{3}{4} - \frac{2}{5}$
25.	$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x = \frac{10}{6}$	26.	$5x - 12 = 3x - 4$	27.	$2(x - 3) = x - 4$	28.	$x + 4 = 2(x - 6)$

71. Να υπολογιστούν οι παραστάσεις :

1.	$\frac{-5 \cdot 3 - 2 \cdot (-7) + 3}{5 \cdot 7 - 4 \cdot 9}$	2.	$\frac{-4 \cdot (-8) + 6 \cdot (-7) - 11 \cdot 0}{9 \cdot (-5) - 3 \cdot 7 - 8 \cdot (-7)}$
3.	$\frac{-5 - [-(2 - 7) + 1] - 1}{-3 - [-(5 + 9) - (-1 + 6)]}$	4.	$\frac{(-12 - 6) : (-2) + 2 \cdot (-6 - 2)}{-5 : (-3 - 2) - 7[-2 - (1 - 3)]}$
5.	$-\left(\frac{3}{9} - \frac{4}{3} + 2\right) + 9 - [8 - 5 + (9 - 2) - (9 - 1)]$	6.	$\left[\left(-\frac{2}{3} + 3\right) : \left(-\frac{7}{3}\right)\right] \cdot [(-2) : \left(-\frac{2}{5}\right)]$
7.	$1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} - \frac{1}{4}$ $1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$	8.	$\frac{3 \cdot \frac{2}{5} - 1}{2 \cdot \frac{3}{5} + 1}$
9.	$\frac{-1 - \frac{1}{-2}}{-2 + \frac{3}{2}}$	10.	$\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right) - \frac{3}{4}}{-3 + \frac{1}{4}}$
11.	$\frac{\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right) - \left(2 - \frac{1}{-2}\right)}{\frac{5}{-2} + \frac{-7}{2} + 1} : \left(-\frac{5}{12}\right)$	12.	$\frac{4 - \frac{1}{4}}{4 - \frac{4}{4}}$ $\frac{4}{3 - \frac{1}{3}}$

Απαντήσεις :

1.		2.		3.		4.		5.	6
6.	-5	7.	-3	8.		9.		10.	4/11
11.	$-\frac{28}{25}$	12.	$\frac{7}{6}$						

72. α) Να βρείτε τους αριθμούς $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ αν ισχύουν : $\frac{\alpha}{3} = \frac{\beta}{5}$ και $\alpha + \beta = 40$.

β) Να βρείτε τους αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ αν ισχύουν : $\frac{\alpha}{4} = \frac{\beta}{5} = \frac{\gamma}{6}$ και $\alpha + \beta + \gamma = 45$.

73. Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ να αποδείξετε ότι :

1.	$\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta} = \left(\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}\right)^2$	2.	$\frac{7\alpha-13\gamma}{7\beta-13\delta} = \frac{\alpha}{\beta}$	3.	$\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta} = \frac{\gamma-\delta}{\gamma+\delta}$
----	--	----	---	----	---

74. Αν ισχύει $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{5}{3}$, να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων :

1.	$\frac{3\alpha+2\beta}{\beta}$	2.	$\frac{2\alpha}{\alpha-\beta}$	3.	$\frac{\beta}{\alpha-2\beta}$	4.	$\frac{6\alpha+4\beta}{4\alpha-2\beta}$
5.	$\frac{3\alpha-\beta}{\beta}$	6.	$\frac{2\alpha+4\beta}{\alpha-\beta}$				

75. Αν ισχύει η αναλογία $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\gamma}{\delta} = 2$ να βρείτε τον λόγο $\frac{\alpha}{\delta}$.

76. Αν $x = \alpha + (-\beta) + (-\gamma)$ και $y = \beta + \gamma + (-\alpha)$, να αποδειχθεί ότι οι x και y είναι αντίθετοι αριθμοί.

77. Μια ομάδα μαθητών έχει αναλάβει να μεταφέρει στην αποθήκη του σχολείου ορισμένα κατεστραμμένα θρανία. Την πρώτη μέρα μετέφεραν το $\frac{1}{3}$ των θρανίων, τη δεύτερη τα $\frac{3}{4}$ των υπολοίπων. Ποιο μέρος υπολείπεται για να τελειώσουν ;

78. Αν α, β είναι αντίστροφοι αριθμοί να βρείτε την τιμή των παραστάσεων :

α) $A = (\alpha\beta)^{2021} + 2020$ β) $B = \alpha\left(\beta + \frac{1}{\alpha}\right)$

79. Να βρείτε ένα κλάσμα πιο μεγάλο από το $\frac{1}{3}$ που έχει για αριθμητή τον αριθμό 1.

80. Αν οι αριθμοί $\alpha-1, \beta-1$ είναι αντίστροφοι, να αποδείξετε ότι :

α) $\alpha+\beta = \alpha\beta$ β) Οι αριθμοί $x = 4\alpha - 2(\alpha+1)\beta$ και $y = 2\alpha - 4(\alpha-\beta)$ είναι αντίθετοι.

81. Τα 10 γράμματα $\kappa, \alpha, \nu, \epsilon, \lambda, \omicron, \pi, \upsilon, \varsigma, \delta$ αντιστοιχούν σε 10 διαφορετικά ψηφία 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Αν το κλάσμα $\frac{\alpha \cdot \lambda \cdot \upsilon \cdot \kappa \cdot \delta \cdot \epsilon \cdot \nu}{\kappa \cdot \alpha \cdot \nu \cdot \epsilon \cdot \lambda \cdot \lambda \cdot \omicron \cdot \pi \cdot \omicron \cdot \upsilon \cdot \lambda \cdot \omicron \cdot \varsigma}$ **ορίζεται**, τότε η

τιμή του είναι : **A. 1** **B. 0** **Γ. $\frac{1}{48}$** **Δ. $\frac{1}{120}$**

82. Δίνονται οι αριθμοί : $\lambda = \left(-\frac{20}{3}\right) : \left(-\frac{5}{6}\right) - \left(-\frac{42}{8}\right) : \left(-\frac{7}{4}\right)$, $\mu = \frac{2}{2 - \frac{2}{2 - \frac{2}{3}}}$

και $\nu = -\{-[-(-1)] - [-(-2)]\}$. Αν ισχύει $\frac{\alpha}{\lambda} = \frac{\beta}{\mu} = \frac{\gamma}{\nu}$ και $\alpha + \beta = 36$, να βρείτε τους αριθμούς α, β και γ .